HW #1

เฉลยการบ้าน
(เกือบทุกข้อ)

Problem 1.18

Use the method of example (3) (p. 28) to show that

$$a\sin\omega t + a\sin(\omega t+\delta) + a\sin(\omega t+2\delta) + \cdots + a\sin[\omega t+(n-1)\delta]$$
$$= a\sin\left[\omega t + \frac{(n-1)}{2}\delta\right]\frac{\sin n\delta/2}{\sin\delta/2}$$

Problem 1.19

If we represent the sum of the series

$$a\cos\omega t + a\cos(\omega t+\delta) + a\cos(\omega t+2\delta) + \cdots + a\cos[\omega t+(n-1)\delta]$$

by the complex exponential form

$$z = a\,e^{i\omega t}(1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \cdots + e^{i(n-1)\delta})$$

show that

$$zz^* = a^2\frac{\sin^2 n\delta/2}{\sin^2\delta/2}$$

ดูจาก solution

เฉลยการบ้าน ข้อสอบ midterm

2. รูปแสดงอนุภาคมวล 5 g เคลื่อนที่ใน 1 มิติ ตามแนวแกน x (หน่วย cm) ภายใต้อิทธิพลของแรงสองแรงซึ่งประกอบด้วย (a) แรงดึงดูด เข้าสู่ origin $\vec{F}_1 = -40x\hat{i}$ dynes

และ (b) damping force $\vec{F}_2 = -20\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\hat{i}$ dynes

(แรงขนาด 1 dyne ทำให้วัตถุมวล 1 g เกิดความเร่ง 1 cm/s^2)

กำหนดอนุภาคเริ่มเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งที่ตำแหน่ง x = 20 cm

จงหา (2) 2.1 equation of motion

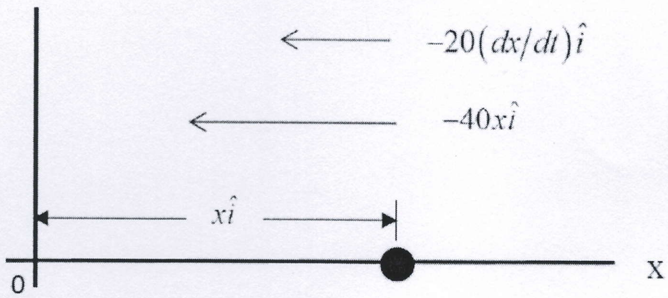
(5) 2.2 ตำแหน่งของอนุภาคที่เวลา t

(7) 2.3 Amplitude, period และ frequency ของ damped oscillation

(แนะ : ให้เขียน $A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t - \phi)$)

(3) 2.4 วาดกราฟแสดงการเปลี่ยนแปลง amplitude กับเวลา t

(3) 2.5 Logarithmic decrement δ



รูปข้อ 2

2.1 equation of motion : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$$-20\dot{x} - 40x = m\ddot{x}$$

$$\therefore \quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0 \qquad \#$$

2.2 หา $x(t)$ ได้จากการหา Solution ใน 2.1

characteristic equation เขียนได้เป็น

$$r^2 + 4x + 8 = 0$$

$$\therefore \; r = -2 \pm i2$$

$$\therefore x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$$

จาก initial conditions

(1) $t = 0$, $x = 20$ cm

$$\therefore x(t=0) = c_1 = 20 \text{ cm}$$

(2) $t = 0$, $\dot{x}(t) = 0$

$$\therefore c_2 = 20 \text{cm}$$

$$\therefore x(t) = e^{-2t}(20\cos 2t + 20\sin 2t) \qquad \#$$

2.3 จาก $x(t) = e^{-2t}(20\cos 2t + 20\sin 2t)$

โดยอาศัย $A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\cos(\omega t - \phi)$

เมื่อ $C^2 = A^2 + B^2$

และ $\phi = \tan^{-1}\frac{A}{B}$

$$\therefore\ 20\cos 2t + 20\sin 2t = \sqrt{20^2+20^2}\cos\left(2t - \tan^{-1}\left(\frac{20}{20}\right)\right)$$

$$= 20\sqrt{2}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ x(t) = 20\sqrt{2}\,e^{-2t}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$$

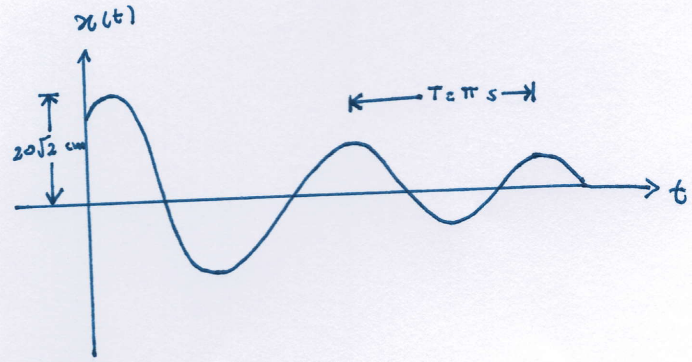
amplitude : $20\sqrt{2}\,e^{-2t}$ cm

period : π sec

frequency : $\frac{1}{\pi}$ Hz

#

2.4



#

2.5 Logarithmic decrement δ คือ logarithm ของอัตราส่วนระหว่าง amplitude amplitude ของ oscillation 2 amplitudes ที่ห่างกัน 1 period (โดย amplitude ที่โตกว่าเป็นเศษ)

เนื่องจาก amplitude ของ damped oscillation เขียนได้เป็น

$$A = 20\sqrt{2}\,e^{-2t}$$

ที่เวลา $t=0$; $A_0 = 20\sqrt{2}$

ที่เวลา $t=\pi$; $A_\pi = 20\sqrt{2}\,e^{-2\pi}$

$$\therefore\ \delta = \ln\frac{20\sqrt{2}}{20\sqrt{2}\,e^{-2\pi}} = 2\pi$$

#

HW # 2

PROBLEM 1 *Damping Ratio*

The *logarithmic decrement* is defined in terms of the ratio of two sequential maxima

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)},$$

where $\omega_d T = 2\pi$. Show that that the *damping ratio* ζ is related to the logarithmic decrement via the following relationship:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

This provides a way of calculating the damping ratio from the logarithmic decrement.

จาก damping ratio $\zeta = \dfrac{\text{damp coefficient}}{\text{critical damping coefficient}}$

$$= \frac{r}{2\sqrt{sm}}$$

$$= \frac{r}{2m\sqrt{\frac{s}{m}}}$$

$\because \omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ และ $\omega_d^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2}$

$$\therefore \zeta = \frac{r}{2m\sqrt{\omega_d^2 + \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{r}{2m\omega_d\sqrt{1 + \frac{r^2}{4m^2\omega_d^2}}}$$

$$= \frac{r\,T}{(2m)(2\pi)\sqrt{1 + \frac{r^2}{4m^2}\frac{T^2}{4\pi^2}}}$$

$$\therefore \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \qquad \because \delta = \frac{rT}{2m}$$

HW#3

1. In a plasma the charges are free. Consider a free point charge q in a uniform and monochromatic electric field $\mathbf{E} = E\exp(-i\omega t)\hat{x}$, where $\hat{x}$ is the unit vector in x direction. (The physical electric field is given by the real part of $\mathbf{E}$.) Show that the displacement of the charge is

$$x = X\exp(-i\omega t), \quad X = -\frac{qE}{m\omega^2}, \tag{1}$$

where m is the mass of the charge. If there are N such free charges per unit volume, what is the polarization density associated with the charges? Argue that the relative permittivity can be written in the form

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \tag{2}$$

and find ω_p. Note that for $\omega < \omega_p$, ϵ_r is negative.

Equation of motion ของ free charge q ใน plasma ~~[illegible]~~ ภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้า เขียนได้เป็น

$$m\ddot{x} = qE = qE_0 e^{-i\omega t} \qquad (\text{กำหนด } E = E_0 e^{-i\omega t})$$

จากการ integrate ได้ $\quad x = -\frac{qE_0}{m\omega^2} e^{-i\omega t}$

หรือ $\quad x = X e^{-i\omega t} \quad$ เมื่อ $\quad X = \frac{-qE_0}{m\omega^2}$

จาก electric displacement $\quad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

คิดเฉพาะในแนวแกน x

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E + Nqx$$

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 \cancel{E} = \varepsilon_0 \cancel{E} - \frac{Nq^2\cancel{E}}{m\omega^2}$$

polarization density

$$\therefore \varepsilon_r = 1 - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\right)$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \text{เมื่อ} \quad \omega_p = \left(\frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

= plasma frequency

$\therefore$ refractive index $\quad n = \sqrt{\varepsilon_r}$

n เป็น imaginary เมื่อ $\omega < \omega_p$

positive เมื่อ $\omega > \omega_p$

zero เมื่อ $\omega = \omega_p$

#

4 Equation of motion สำหรับ ระบบ forced mass spring damping เขียนได้เป็น

$$\ddot{x}+2\alpha\omega\dot{x}+\omega^2x=\omega^2A_0\cos\sigma t$$

โดยมี solution เขียนได้เป็น

$$x=\frac{A_0\left[1-\left(\sigma^2/\omega^2\right)\right]\cos\sigma t+2A_0\alpha\left(\sigma/\omega\right)\sin\sigma t}{\left(1-\left(\sigma^2/\omega^2\right)\right)^2+4\alpha^2\left(\sigma^2/\omega^2\right)}+A_0e^{-\alpha\omega t}\cos\left[\left(1-\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}\omega t-\varepsilon\right]$$

(7) 4.1 จงวาดกราฟเฉพาะ steady state response ของระบบ forced mass spring damping นี้

(8) 4.2 จงวาดกราฟคร่าว ๆ แสดงการเปลี่ยนแปลงเฉพาะ amplitude ของ steady state response กับ σ/ω สำหรับค่า $\alpha=0,0.2,0.4$ และ 1.0

4.1 Solution ที่ให้มา ประกอบด้วย ส่วนของ steady state (เทอมแรก) และ ส่วนของ transient (เทอมหลัง)

เราจะพิจารณา เฉพาะ steady state response ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของ

$$x = a\cos\sigma t + b\sin\sigma t$$

โดยพยายามจัดสมการให้อยู่ในรูป

$$x = C\cos(\sigma t-\phi)$$

เมื่อ $C^2 = a^2+b^2$ และ $\tan\phi = \frac{a}{b}$

เราพบว่า $a = \frac{A_0[1-(\sigma^2/\omega^2)]}{[1-(\sigma^2/\omega^2)]^2+4\alpha^2\sigma^2/\omega^2}$ และ $b = \frac{2A_0\alpha\sigma/\omega}{[1-(\sigma^2/\omega^2)]^2+4\alpha^2\sigma^2/\omega^2}$

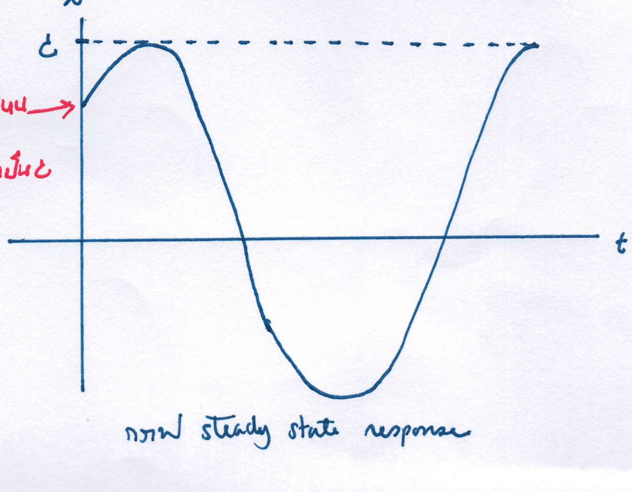
$$\therefore C = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{A_0}{\{[1-(\sigma^2/\omega^2)]^2+4\alpha^2\sigma^2/\omega^2\}}$$

$$\tan\phi = \frac{[1-(\sigma^2/\omega^2)]}{2\alpha\sigma/\omega}$$

∴ สมการ steady state response เขียนได้เป็น

$$x = \underbrace{\frac{A_0}{\{[1-(\sigma^2/\omega^2)]^2+4\alpha^2\sigma^2/\omega^2\}^{\frac{1}{2}}}}_{C}\cos\left(\sigma t-\underbrace{\tan^{-1}\left\{\frac{[1-(\sigma^2/\omega^2)]}{2\alpha\sigma/\omega}\right\}}_{\phi}\right)$$

กราฟจะตัดแกน y ตรงไหน
ขึ้นกับค่าเฟส ϕ
โดยมี amplitude สูงสุด เป็น C



กราฟ steady state response

4.2 กราฟ ของ amplitude กับ σ/ω

โดยพิจารณา ที่ค่า $\alpha = 0, 0.2, 0.4$ และ 1.0

จาก $$c = \frac{A_0}{\left\{[1-(\sigma^2/\omega^2)]^2 + 4\alpha^2\sigma^2/\omega^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

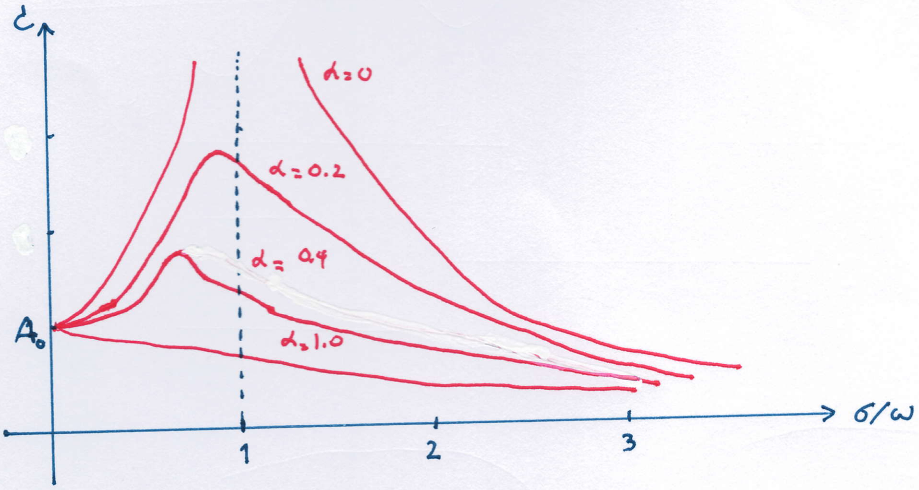
เมื่อ $\alpha = 0$ กราฟมีค่าสูงสุด ที่ $\frac{\sigma}{\omega} = 1$ โดยที่ การเปลี่ยนแปลง ของค่า amplitude ทั้งทางซ้ายและทางขวา ของ $\frac{\sigma}{\omega} = 1$ ต่างก็ลดลง

เมื่อ $\alpha = 0.2$ การเปลี่ยนแปลง ของ amplitude ทางซ้าย และ ขวา ของ ค่า $\sigma/\omega = 1$ มีความแตกต่างกัน กล่าวคือ ที่ค่า $\sigma/\omega > 1$ กราฟ จะลดลง อย่างเดียว ในขณะที่ ค่า $\frac{\sigma}{\omega} < 1$ กราฟมีการ เพิ่มขึ้น และลดลง

เมื่อ $\alpha = 0.4$ คล้ายกับ กรณี $\alpha = 0.2$

เมื่อ $\alpha = 1.0$ พบว่า $$c = \frac{A_0}{[1+(\sigma^2/\omega^2)]^2}$$

ซึ่งเป็นกราฟ ที่ลดลง อย่างเดียว โดยไม่มี peak



#

HW#4

Problem 4.12

The figure below shows two identical LC circuits coupled by a common capacitance C with the directions of current flow indicated by arrows. The voltage equations are

$$V_1 - V_2 = L\frac{\mathrm{d}I_a}{\mathrm{d}t}$$

and

$$V_2 - V_3 = L\frac{\mathrm{d}I_b}{\mathrm{d}t}$$

whilst the currents are given by

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = -I_a \quad \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = I_a - I_b$$

and

$$\frac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}t} = I_b$$

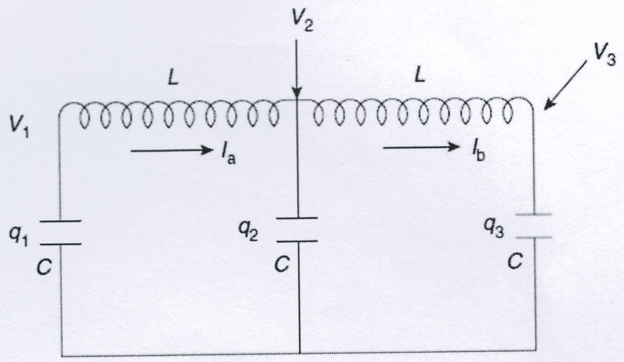
Solve the voltage equations for the normal coordinates $(I_a + I_b)$ and $(I_a - I_b)$ to show that the normal modes of oscillation are given by

$$I_a = I_b \quad \text{at} \quad \omega_1^2 = \frac{1}{LC}$$

and

$$I_a = -I_b \quad \text{at} \quad \omega_2^2 = \frac{3}{LC}$$

Note that when $I_a = I_b$ the coupling capacitance may be removed and $q_1 = -q_2$. When $I_a = -I_b$, $q_2 = -2q_1 = -2q_3$.



วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาข้อนี้คือ decoupling method

เริ่มต้นจากการเปลี่ยน coordinates ที่ให้มาเป็น normal coordinates $(I_a + I_b)$ และ $(I_a - I_b)$

จาก $V_1 - V_2 = L\frac{dI_a}{dt}$

และ $V_2 - V_3 = L\frac{dI_b}{dt}$

$\because V = \frac{q}{C}$

$\therefore \frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{C} = L\frac{dI_a}{dt} \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dq_1}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq_2}{dt} = L\frac{d^2I_a}{dt^2}$ — (1)

และ $\frac{q_2}{C} - \frac{q_3}{C} = L\frac{dI_b}{dt} \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dq_2}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq_3}{dt} = L\frac{d^2I_b}{dt^2}$ — (2)

แทนค่า I_a, I_b ที่ให้มาลงใน (1) + (2)

$$-\frac{1}{C}I_a - \frac{1}{C}(I_a - I_b) = L\frac{d^2I_a}{dt^2} \quad \text{— (3)}$$

$$\frac{1}{C}(I_a - I_b) - \frac{1}{C}I_b = L\frac{d^2I_b}{dt^2} \quad \text{— (4)}$$

(3) + (4) และจัดรูปสมการ

$$\frac{d^2}{dt^2}(I_a + I_b) + \frac{1}{LC}(I_a + I_b) = 0 \quad \text{— (5)}$$

$\therefore$ สำหรับ normal coordinates $(I_a + I_b)$: $\omega_1^2 = \frac{1}{LC}$

(3) - (4) และจัดรูปสมการ

$$\frac{d^2}{dt^2}(I_a - I_b) + \frac{3}{LC}(I_a - I_b) = 0$$

$\therefore$ สำหรับ normal coordinates $(I_a - I_b)$: $\omega_2^2 = \frac{3}{LC}$ #

HW # 4

Problem 4.13

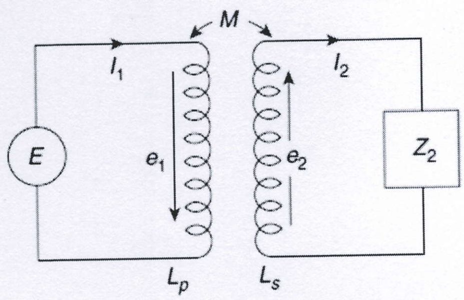
A generator of e.m.f. E is coupled to a load Z by means of an ideal transformer. From the diagram, Kirchhoff's Law gives

$$E = -e_1 = i\omega L_p I_1 - i\omega M I_2$$

and

$$I_2 Z_2 = e_2 = i\omega M I_1 - i\omega L_s I_2.$$

Show that E/I_1, the impedance of the whole system seen by the generator, is the sum of the primary impedance and a 'reflected impedance' from the secondary circuit of $\omega^2 M^2/Z_s$ where $Z_s = Z_2 + i\omega L_s$.



gorn solution

HW#4

Problem 5.9

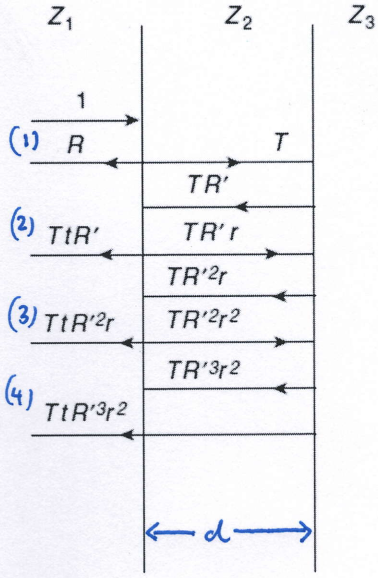
In the figure, media of impedances Z_1 and Z_3 are separated by a medium of intermediate impedance Z_2 and thickness $\lambda/4$ measured in this medium. A normally incident wave in the first medium has unit amplitude and the reflection and transmission coefficients for multiple reflections are shown. Show that the total reflected amplitude in medium 1 which is

$$R + tTR'(1 + rR' + r^2R'^2 \ldots)$$

is zero at $R = R'$ and show that this defines the condition

$$Z_2^2 = Z_1Z_3$$

(Note that for zero total reflection in medium 1, the first reflection R is cancelled by the sum of all subsequent reflections.)



กำหนดให้ incident wave มี unit amplitude (ขนาดของ amplitude = 1 หน่วย)

amplitude จาก (1) คือ R

amplitude จาก (2) คือ $tTR'e^{-2i\delta}$ เมื่อ $\delta = \frac{2\pi}{\lambda_2}d$ = เฟสที่เกิดจากการเดินทางของคลื่นในตัวกลาง ด้วยระยะทางเท่ากับความหนาของตัวกลางที่ 2

amplitude จาก (3) คือ $tTrR'^2e^{-4i\delta}$

amplitude จาก (4) คือ $tTr^2R'^3e^{-6i\delta}$

$\vdots$

$\therefore$ total reflected amplitude ใน medium 1 คือ

$$R_{tot} = R + tTR'e^{-2i\delta}\underbrace{\left(1 + rR'e^{-2i\delta} + (rR')^2\left(e^{-2i\delta}\right)^2 + \ldots\right)}$$

โดยอาศัย $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$

$$\therefore\ 1 + rR'e^{-2i\delta} + (rR')^2\left(e^{-2i\delta}\right)^2 + \ldots = \frac{1}{1 - rR'e^{-2i\delta}}$$

$$\therefore\ R_{tot} = R + tTR'e^{-2i\delta}\left(\frac{1}{1 - rR'e^{-2i\delta}}\right)$$

$$= R + \frac{tTR'e^{-2i\delta}}{1 - rR'e^{-2i\delta}}$$

โดยอาศัย Stokes Relation

$R = -r$

และ $Tt = 1 - R^2$

$$R_{tot} = R + \frac{(1-R^2)R'e^{-2i\delta}}{1+RR'e^{-2i\delta}}$$

$$= \frac{R + \cancel{R^2R'e^{-2i\delta}} + R'e^{-2i\delta} - \cancel{R^2R'e^{-2i\delta}}}{1+RR'e^{-2i\delta}}$$

$$= \frac{R + R'e^{-2i\delta}}{1+RR'e^{-2i\delta}}$$

$$\text{Reflectivity} = R_{tot}\cdot R^*_{tot} = \frac{(R+R'e^{-2i\delta})(R+R'e^{+2i\delta})}{(1+RR'e^{-2i\delta})(1+RR'e^{2i\delta})}$$

$$= \frac{R^2 + RR'e^{+2i\delta} + RR'e^{-2i\delta} + R'^2}{1+RR'e^{2i\delta} + RR'e^{-2i\delta} + RR'}$$

$$= \frac{R^2 + R'^2 + 2RR'\cos 2\delta}{1+RR' + 2RR'\cos 2\delta}$$

ถ้า thickness ของ ชั้นที่ 2 เป็น $\frac{\lambda_2}{4}$ $\quad \therefore \delta = \frac{2\pi}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \text{Reflectivity} = \frac{R^2 + R'^2 - 2RR'}{1-2RR'} = \frac{(R-R')^2}{1-2RR'}$$

$\therefore$ Reflectivity จะมีค่า เป็น ศูนย์ เมื่อ $R = R'$

เนื่องจาก $R = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ และ $R' = \frac{z_2 - z_3}{z_3 + z_2}$

เมื่อ $R = R'$

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3}$$

$$\therefore z_1 = \sqrt{z_1 z_3}$$

#

HW#5

Problem 5.27

Show that in the Doppler effect when the source and observer are not moving in the same direction that the frequencies

$$\nu' = \frac{\nu c}{c - u'}, \quad \nu'' = \frac{\nu(c - v)}{c}$$

and

$$\nu''' = \nu\left(\frac{c - v}{c - u}\right)$$

are valid if u and v are not the actual velocities but the components of these velocities along the direction in which the waves reach the observer.

1. Source เคลื่อนที่เข้าหา observer อยู่นิ่ง

ความถี่ที่ observer ได้รับคือ $\nu' = \frac{c'}{\lambda'}$

ในที่นี้ อัตราเร็วของ signal ที่ observer (เคลื่อนเข้าหา) มีค่าเท่ากับ c (อัตราเร็วของ signal นั่นเอง)

ในขณะที่ ความยาวคลื่น ที่ observer ได้รับ มีค่าลดลง เป็น $\lambda' = \lambda - uT$ ← ช่วงเวลาระหว่างการปล่อยสัญญาณ 2 ลูกที่ติดกัน

(λ: ความยาวคลื่นของ signal; u: อัตราเร็วของ source)

$$\therefore \nu' = \frac{c}{\lambda - uT}$$

$$= \frac{\nu c}{(c - u)} \qquad \text{เมื่อ } \nu = c/\lambda \qquad \#$$

2. observer เคลื่อนที่ ~~เข้าหา~~ ออกห่าง source อยู่นิ่ง

ความถี่ที่ observer ได้รับคือ $\nu' = \frac{c'}{\lambda'}$

ในที่นี้ observer ได้รับ ความยาวคลื่นของ signal เป็น λ (เท่ากับที่ source ปล่อยออกมา) แต่

อัตราเร็วของ signal ที่ observer ได้รับ คือ $c' = c - v$ (เมื่อ v คือ อัตราเร็วของ observer)

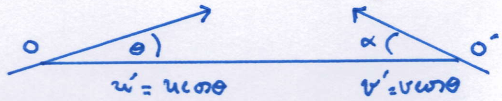
$$\therefore \nu' = \frac{c - v}{\lambda} = \frac{\nu(c - v)}{c}$$

3. Source เคลื่อนที่เข้าหา observer ที่เคลื่อนที่ออกห่าง

$$\nu' = \frac{c'}{\lambda'}$$

$$= \frac{c - v}{\lambda - \frac{u}{\nu}} = \nu\,\frac{(c - v)}{(c - u)} \qquad \#$$

ความสัมพันธ์ 1, 2, 3 ใช้ได้กับกรณีที่ source และ observer เคลื่อนที่ในทิศทางดังรูป เมื่อแทนค่า u ด้วย องค์ประกอบของความเร็ว เหมาะสม



HW #5

Problem 5.28

In extending the Doppler principle consider the accompanying figure where O is a stationary observer at the origin of the coordinate system $O(x,t)$ and O' is an observer situated at the origin of the system $O'(x',t')$ which moves with a constant velocity v in the x direction relative to the system O. When O and O' are coincident at $t = t' = 0$ a light source sends waves in the x direction with constant velocity c. These waves obey the relation

$$0 \equiv x^2 - c^2t^2(\text{seen by } O) \equiv x'^2 - c^2t'^2(\text{seen by } O'). \tag{1}$$

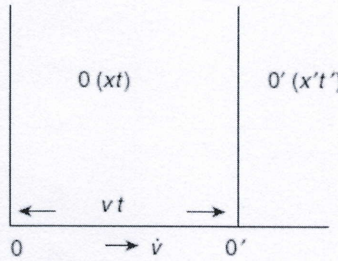
Since there is only one relative velocity v, the transformation

$$x' = k(x - vt) \tag{2}$$

and

$$x = k'(x' + vt') \tag{3}$$

must also hold. Use (2) and (3) to eliminate x' and t' from (1) and show that this identity is satisfied only by $k = k' = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$, where $\beta = v/c$. (Hint—in the identity of equation (1) equate coefficients of the variables to zero.).



This is the Lorentz transformation in the theory of relativity giving

$$x' = \frac{(x - vt)}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

$$t' = \frac{(t - (v/c^2)x)}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad t = \frac{(t' + (v/c^2)x')}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

ดูจาก solution

HW #6

Problem 6.13

On p. 121 we discussed the problem of matching two strings of impedances Z_1 and Z_3 by the insertion of a quarter wave element of impedance

$$Z_2 = (Z_1 Z_3)^{1/2}$$

Repeat this problem for the acoustic case where the expressions for the string displacements

$$y_i, y_r, y_t$$

now represent the appropriate acoustic pressures p_i, p_r and p_t.

Show that the boundary condition for pressure continuity at $x = 0$ is

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

and that for continuity of particle velocity is

$$Z_2(A_1 - B_1) = Z_1(A_2 - B_2)$$

Similarly, at $x = l$, show that the boundary conditions are

$$A_2 e^{-ik_2 l} + B_2 e^{ik_2 l} = A_3$$

and

$$Z_3(A_2 e^{-ik_2 l} - B_2 e^{ik_2 l}) = Z_2 A_3$$

Hence prove that the coefficient of sound transmission

$$\frac{Z_1}{Z_3}\frac{A_3^2}{A_1^2} = 1$$

when

$$Z_2^2 = Z_1 Z_3 \quad \text{and} \quad l = \frac{\lambda_2}{4}$$

(Note that the expressions for both boundary conditions and transmission coefficient differ from those in the case of the string.)

โดยตั้ง boundary conditions เหมือนใน solution เราได้สมการเริ่มต้นในการคำนวณมา 4 สมการ ประกอบด้วย

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \qquad -(1)$$

$$Z_2(A_1 - B_1) = Z_1(A_2 - B_2) \qquad -(2)$$

$$A_2 e^{-ik_2 l} + B_2 e^{ik_2 l} = A_3 \qquad -(3)$$

$$Z_3(A_2 e^{-ik_2 l} - B_2 e^{ik_2 l}) = Z_2 A_3 \qquad -(4)$$

ขั้นตอน ในการแก้ปัญหา ประกอบด้วย

(1) จากสมการที่ 1 และ 2 โดยเขียน A_1 ในเทอมของ A_2 และ B_2

(2) จากสมการที่ 3 และ 4 โดยเขียน A_2, B_2 ในเทอมของ A_3

ขั้นตอนที่ (1)

$$B_1 = A_2 + B_2 - A_1$$

$$(A_1 - A_2 - B_2 + A_1) = \frac{Z_1}{Z_2}(A_2 - B_2)$$

$$\therefore \quad A_1 = \frac{(r_{12}+1)A_2 + (1-r_{12})B_2}{2} \quad ; \quad \frac{Z_1}{Z_2} = r_{12} \qquad — 5$$

ขั้นตอนที่ (2)

$$B_2 e^{ik_2 l} = A_3 - A_2 e^{-ik_2 l}$$

$$A_2 e^{-ik_2 l} - A_3 + A_2 e^{-ik_2 l} = \frac{Z_2}{Z_3} A_3$$

$$\therefore \quad A_2 = \frac{(r_{23}+1)\; A_3 e^{ik_2 l}}{2} \quad ; \quad \frac{Z_2}{Z_3} = r_{23} \qquad — 6$$

และ

$$A_2 e^{-ik_2 l} = A_3 - B_2 e^{ik_2 l}$$

$$A_3 - B_2 e^{ik_2 l} - B_2 e^{ik_2 l} = r_{23} A_3$$

$$\therefore \quad B_2 = \frac{(1-r_{23})\; A_3 e^{-ik_2 l}}{2} \qquad — 7$$

แทน 6, 7 ใน 5

$$A_1 = \frac{A_3}{4}\left[(r_{12}+1)(r_{23}+1)(\cos k_2 l + i \sin k_2 l) + (1-r_{12})(1-r_{23})(\cos k_2 l - i \sin k_2 l)\right]$$

$$= \frac{A_3}{2}\left[(r_{12} r_{23} + 1)\cos k_2 l + i\,(r_{12} + r_{23})\sin k_2 l\right]$$

$$\therefore \quad \frac{A_3}{A_1} = \frac{2}{(r_{12} r_{23} + 1)\cos k_2 l + i\,(r_{12} + r_{23})\sin k_2 l}$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_3}\right)\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 = \frac{(r_{13})\,4}{(r_{12} r_{23} + 1)^2 \cos^2 k_2 l + (r_{12} + r_{23})^2 \sin^2 k_2 l} \qquad — 8$$

แทน $l = \frac{\lambda_2}{4}$ ใน (8)

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 = \frac{4r_{13}}{(r_{12}+r_{23})^2} \qquad (9)$$

ในกรณีที่เกิด matching

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \quad \frac{4r_{13}}{(r_{12}+r_{23})^2} = 1$$

$$2\sqrt{\frac{z_1}{z_3}} = \left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}\right)$$

$$= \frac{z_1 z_3 + z_2^2}{z_2 z_3}$$

$$z_2^2 - 2\sqrt{z_1 z_3}\, z_2 + z_1 z_3 = 0$$

$$\therefore \quad z_2 = \frac{2\sqrt{z_1 z_3} \pm \sqrt{\cancelto{0}{4z_1z_3 - 4z_1z_3}}}{2}$$

$$\therefore \quad z_2 = \sqrt{z_1 z_3} \qquad \#$$

Problem 6.17

Waves near the surface of a non-viscous incompressible liquid of density ρ have a phase velocity given by

$$v^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}\right] \tanh kh$$

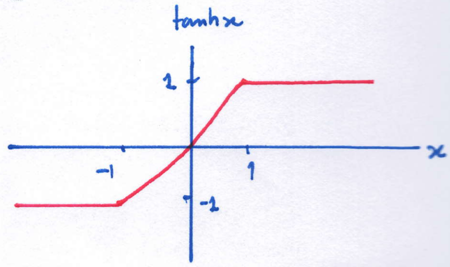
where g is the acceleration due to gravity, T is the surface tension, k is the wave number and h is the liquid depth. When $h \ll \lambda$ the liquid is shallow; when $h \gg \lambda$ the liquid is deep.

(a) Show that, when gravity and surface tension are equally important and $h \gg \lambda$, the wave velocity is a minimum at $v^4 = 4gT/\rho$, and show that this occurs for a 'critical' wavelength $\lambda_c = 2\pi(T/\rho g)^{1/2}$.

(b) The condition $\lambda \gg \lambda_c$ defines a *gravity* wave, and surface tension is negligible. Show that gravity waves in a shallow liquid are non-dispersive with a velocity $v = \sqrt{gh}$ (see Problem 6.16).

(c) Show that gravity waves in a deep liquid have a phase velocity $v = \sqrt{g/k}$ and a group velocity of half this value.

(d) The condition $\lambda < \lambda_c$ defines a ripple (dominated by surface tension). Show that short ripples in a deep liquid have a phase velocity $v = \sqrt{Tk/\rho}$ and a group velocity of $\frac{3}{2}v$. (Note the anomalous dispersion).



(a) กำหนด $h >> \lambda$ $\therefore kh = \frac{2\pi}{\lambda} h \to \infty$

ทำให้ $\tanh kh \to 1$ ดูได้จากกราฟ $\tanh x$

$$\therefore v^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho}\right]$$

$$v = \left[\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{T2\pi}{\rho\lambda}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{—①}$$

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left[\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\rho\lambda^2}\right] = 0$$

$$\frac{g}{2\pi} = \frac{2\pi T}{\rho\lambda^2}$$

$$\therefore \lambda_c = 2\pi\left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \#$$

แทน λ_c ลงใน ①

$$v^2 = \left[\frac{g}{2\pi} 2\pi\left(\frac{T}{\rho g}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2\pi T}{\rho\, 2\pi}\left(\frac{\rho g}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2\left(\frac{gT}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore v_{min}^4 = 4\left(\frac{gT}{\rho}\right) \quad \#$$

(b) The surface tension is negligible และ พิจารณาเงื่อนไข shallow : $h \ll \lambda$

$$\therefore \quad v^2 = \left[\frac{g}{k}\right] \tanh kh$$

เมื่อ $h \ll \lambda$ แสดงว่า $\tanh kh \to 0$

ดังนั้น $\tanh kh \approx kh$

$$\therefore \quad v = \sqrt{gh} \qquad \#$$

(c) กรณีที่เป็น $\begin{cases} \text{surface tension is negligible} \\ \text{gravity wave} \end{cases}$ และ deep liquid $(h \gg \lambda)$

$$v^2 = \left[\frac{g}{k} + \cancelto{0}{\frac{Tk}{\rho}}\right] \tanh kh$$

$$\therefore \quad v = \left[\frac{g}{k}\right]^{\frac{1}{2}}$$ (ค่านี้คือ phase velocity)

group velocity หาได้จาก $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = v + k\dfrac{dv}{dk}$

$$= \sqrt{\frac{g}{k}} + k\frac{d}{dk}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$\therefore v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \qquad \#$$

(d) surface tension dominates และ deep liquid $(h \gg \lambda)$

$$v^2 = \left[\frac{Tk}{\rho}\right]$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{Tk}{\rho}}$$ (phase velocity)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v + k\frac{dv}{dk}$$

$$= \sqrt{\frac{Tk}{\rho}} + k\sqrt{\frac{T}{\rho}}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$\therefore v_g = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{Tk}{\rho}} = \frac{3}{2}v \qquad \#$$