Simulation of Earth-Like Exoplanets

Nattawut Sinsawaiwong

Department of Physics

Facility of Science, Mahidol University

คำนำ

ในวันที่ 1 มิถุนายน 2020 ได้มีการคนพบ Exoplanet ที่ได้รับการยืนยันทั้งสิ้น 4 ,268 ดวง แต่การตรวจสอบคุณสมบัติเช่น มวล ขนาด องค์ประกอบทางเคมี โครงสร้าง ฯลฯ ของ Exoplanet แต่ละดวงนั้นทำได้จำกัดและมีความคลาดเคลื่อนสูง ในโครงงานจะทำการจำลอง Exoplanet เพื่อที่จะ ทำนายคุณสมบัติเหล่านั้น โดยใช้โลกเป็นต้นแบบเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างมวลกับรัศมีของดาวเคราะห์คล้ายโลก

ณัฐวุฒิ สินไสววงศ์

สารบัญ

บทนำ หน้า

ดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ 1

ดาวเคราะห์คล้ายโลก 2

ส่วนประกอบของโลก 3

ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความหนาแน่น 4

ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและอุณหภูมิ 6

วิธีการสร้างแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์ 7

ผลการทดลอง 12

สรุป 20

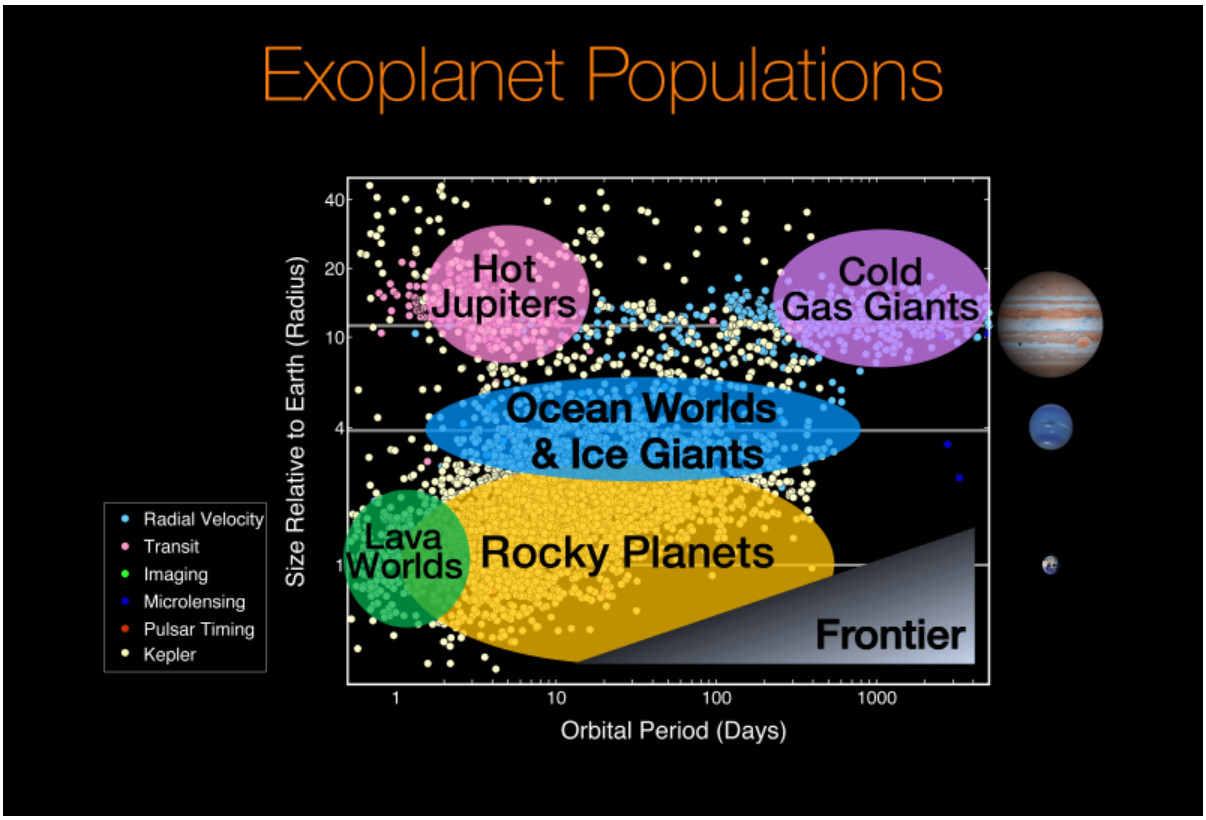
บรรณานุกรม 22

บทนำ

ดาวเคราะห์นอกระบบสุริยะ

ดาวเคราะห์นอกระบบระบบสุริยะ (Exoplanet) คือ ดาวเคราะห์ที่อยู่นอกระบบสุริยะของดวงอาทิตย์ ในวันที่ 1 มิถุนายน 2020 ได้มีการคนพบ Exoplanet ที่ได้รับการยืนยันทั้งสิ้น 4,268 ดวง

Exoplanet จำแนกตามองค์ประกอบได้เป็น 3 กลุ่มได้แก่ ดาวเคราะห์หิน (Rocky planet) ดาวเคราะห์ (Ocean planet) ดาวเคราะห์แก๊ส (Gas giant)



กราฟประชากร Exoplanet

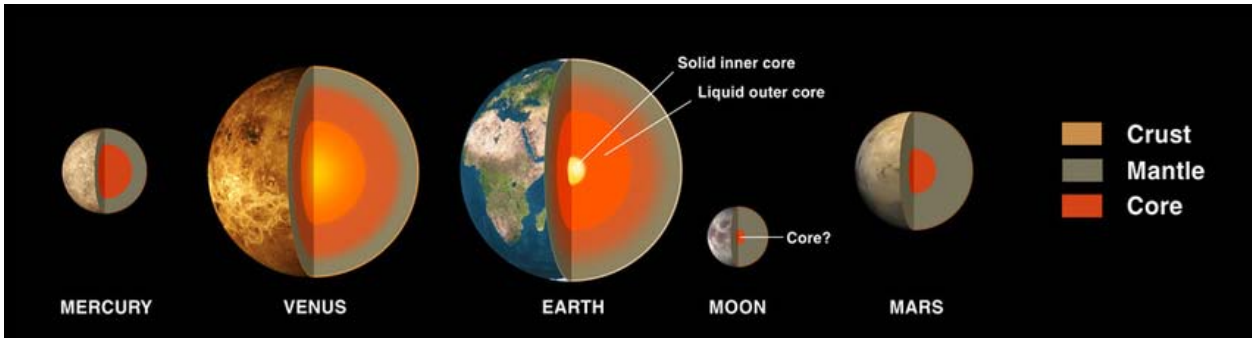
(https://en.wikipedia.org/wiki/Exoplanet)

ในโครงงานนี้ จะสนใจเฉพาะส่วน ดาวเคราะห์หิน

ดาวเคราะห์คล้ายโลก

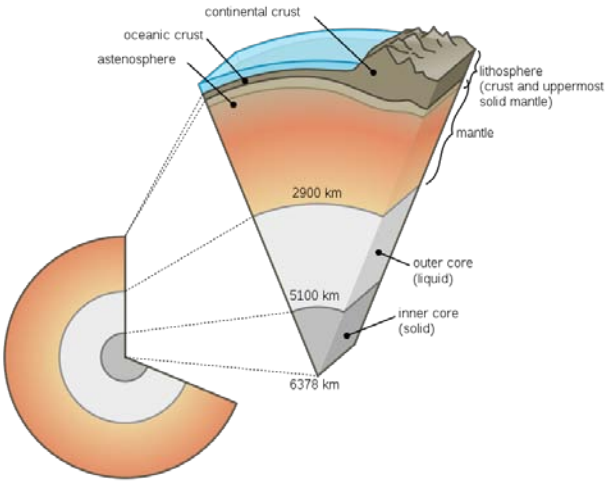
ดาวเคราะห์คล้ายโลก (Terrestrial planet) หรือดาวเคราะห์หิน (Rocky planet) คือดาวเคราะห์ที่มีส่วนประกอบหลักเป็นหินและโลหะ ซึ่งโดยส่วนใหญ่จะเป็นหินกลุ่มซิลิเกตและเหล็ก

ดาวเคราะห์คล้ายโลก ส่วนใหญ่มีโรงสร้างแบ่งเป็น 3 ชั้นคือ เปลือกโลก (Crust) เนื้อโลก(Mantle) และแกนโลก(Core)



รูปแสดงโครงสร้างของดาวเคราะห์หินในระบบสุริยะ

(https://www.researchgate.net/)



รูปแสดงโครงสร้างของโลก

(https://en.wikipedia.org/wiki/Earth)

ส่วนประกอบของโลก

เนื่องจาก ดาวเคราะห์ แต่ละดวงมีองค์ประกอบที่มีสัดส่วนแตกต่างกันไป ในโครงงานนี้จะใช้องค์ประกอบของโลกเป็นต้นแบบ

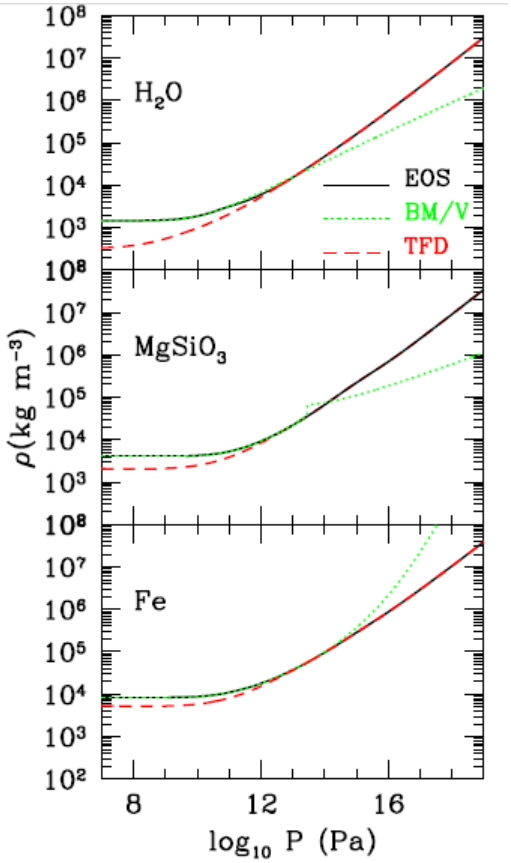
เปลือกโลกมีมวลคิดเป็น 0.1 % ของมวลโลก เนื่องจากเปลือกโลกมีสัดส่วนมวลน้อยมาก และมีองค์ประกอบไม่ต่างจากเนื้อโลกมากนัก ในโครงงานนี้จะให้เปลือกโลกเป็นส่วนหนึ่งของเนื้อโลก

เนื้อโลกมีมวลคิดเป็น 67.4 % ของมวลโลกมีองค์ประกอบโดยมวลของแต่ละธาตุคือ ออกซิเจน 4 5%, แมกนีเซียม 23%, ซิลิคอน 22%, เหล็ก 5.8%, แคลเซียม 2.3%, อลูมิเนียม 2.2% และธาตุอื่น ๆ 0.6% ซึ่งมีธาตุองค์ประกอบหลัก 3 ธาตุคิดเป็น 90 % ของมวลทั้งหมด ในโครงงานนี้จะใช้แร่ Enstatite ที่มีสูตรเคมีคือ $MgSiO_3$ เป็นองค์ประกอบต้นแบบของเนื้อโลก

แกนโลกมีมวลคิดเป็น 32.5% ของมวลโลกมีองค์ประกอบโดยมวลของแต่ละธาตุคือ เหล็ก 88.8%, นิกเกิล 5.8%, กำมะถัน 4.5% และธาตุอื่น ๆ 0.9% เนื่องจากประกอบด้วยเหล็ก 88.8% ในโครงงานนี้จะใช้เหล็กเป็นองค์ประกอบต้นแบบของแกนโลก

ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความหนาแน่น

ที่ความดันต่ำกว่า 200 GPa ความสัมพันธ์ของความดันกับความหนาแน่นจะเป็นไปตาม Birch–Murnaghan equation of state(BM) และ Rose–Vinet equation of state(V) แต่ที่ความดันสูงกว่า 200 GPa ความสัมพันธ์ของความดันกับความหนาแน่นจะเป็นไปตาม Thomas-Fermi-Dirac equation of state(TFD) ซึ่งความสัมพันธ์ของความดันกับความหนาแน่นของทั้ง 3 สมการนี้สามารถประมาณได้โดยใช้สมการ polytropic



กราฟเปรียบเทียบของทั้ง 3 สมการ

(Seager et al. 2012, Proceeding IAU, 8, S293, 350-355)

จากกราฟเปรียบเทียบสมการ polytropic คือ EOS ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการ polytropic ให้ค่าที่แม่นยำทั้งที่ความดันสูงและต่ำกว่า 200 GPa

ในโครงงานนี้จะใช้สมการความสัมพันธ์ของความดันกับความหนาแน่นเป็นสมการ polytropic ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\rho(P) = \rho_0 + cP^n$$

โดยค่า ρ_0 , c และ n ที่ใช้ในการคำนวณมาจากตารางนี้

Material	ρ_0 [kg m^{-3}]	c [kg m^{-3} Pa^{-n}]	n
Fe(α)	8300.00	0.00349	0.528
$MgSiO_3$ (perovskite)	4100.00	0.00161	0.541
(Mg,Fe)SiO_3	4260.00	0.00127	0.549
H_2O	1460.00	0.00311	0.513
C (graphite)	2250.00	0.00350	0.514
SiC	3220.00	0.00172	0.537

ตารางค่าค่า ρ_0 , c และ n สำหรับสมการ polytropic

(Seager et al. 2012, Proceeding IAU, 8, S293, 350-355)

ความสัมพันธ์ระหว่างความดันและอุณหภูมิ

สำหรับความสัมพันธ์ของความดันกับอุณหภูมิจะใช้สมการประมาณดังนี้

สำหรับ $MgSiO_3$

$$P_{th}(T) = \alpha K_0(T-300)$$

โดย $\alpha K_0 = 0.00692$ GPa/K

สำหรับ Fe(α)

$$P_{th}(T) = \alpha K_0(T-300)+(\partial \alpha K_0/\partial T)_V(T-300)^2$$

โดย $\alpha K_0 = 0.00121$ GPa/K และ $(\partial \alpha K_0/\partial T)_V = 7.8 \times 10^{-7}$ GPa/K^2

เมื่อหาค่า P_{th} ได้จะนำไปคำนวณหา P_{eff} โดย

$$P_{eff} = P - P_{th}$$

โดย P_{eff} คือค่าความดันจริงที่ใช้แทนค่าในสมการ polytropic

และ P คือความดันที่เกิดจากผลของแรงโน้มถ่วง

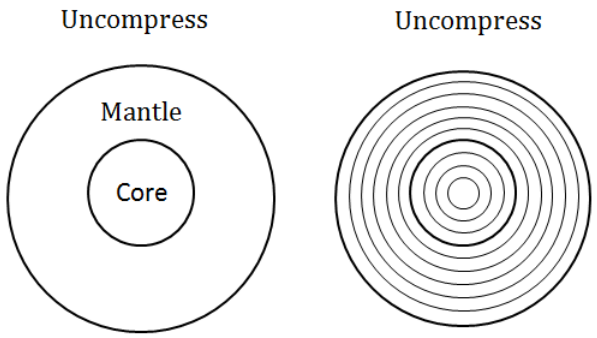
วิธีการสร้างแบบจำลองทางคอมพิวเตอร์

การจำลองจะเริ่มจากกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) ได้แก่ มวลรวมของดาวเคราะห์ สัดส่วนมวลของ mantle และ core จำนวนชั้น จำนวนรอบ(Iteration) อุณหภูมิพื้นผิว อัตราการไหลของความร้อนที่ผิวต่อหน่วยพื้นที่ (Surface Heat Flow Rate per Area) และค่าคงตัวต่าง ๆ

Initial Condition	Value
Total Mass	1 - 10000 $M_{\oplus}$
Mantle Mass	67.5%
Core Mass	32.5%
Number of Layer	10000
Number of Iteration	100
Surface Temperature	287.16 K
Surface Heat Flow Rate per Area	0.092145 W/m^2

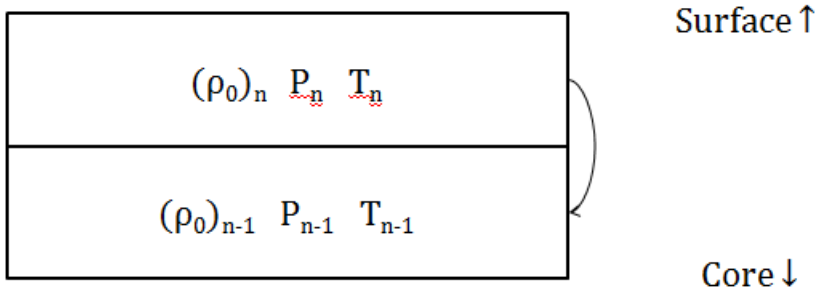
ตารางรวมค่า Initial Condition

ใน iteration แรกจะเริ่มจากจำลองดาวเคราะห์ในสภาวะที่ไม่มีแรงโน้มถ่วง(ความดันเป็น 0 ทั้งดวง) คำนวณหารัศมีรวม (R_{Total})และแบ่งดาวเคราะห์ออกเป็นชั้น ๆ ตามเงื่อนไขเริ่มต้นดัง รูปที่ 1 โดยจะให้แต่ละชั้นมีความหนาเท่ากัน จากนั้นจะคำนวณหามวลของแต่ละชั้น มวลของแต่ละชั้นจะคงที่ตลอดการคำนวณในทุก ๆ iteration



รูปที่ 1

จากนั้นจะทำการคำนวณหาค่าต่าง ๆ เมื่อคิดผลของแรงโน้มถ่วงโดยเริ่มจากผิวดาวสู่แกนดาวดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

ที่ผิวมีอุณหภูมิตามเงื่อนไขเริ่มต้นและมีความดันเป็น 0 (P=0) นำอุณหภูมิมาคำนวณหา P_{th} และ P_{eff} แล้วคำนวณหาความหนาแน่นโดยใช้สมการ polytropic

ที่ชั้นถัดลงใด ๆ (ชั้นที่ n-1 ในรูปที่ 2) เริ่มจากคำนวณหาอุณหภูมิโดยมีเงื่อนไขว่าอัตราการไหลของความร้อนผ่านแต่ละชั้นจะมีค่าคงที่ โดย T_{n-1} จะเป็นไปตามสมการนี้

$$T_{n-1} = T_n + \text{const.}*H_n*(\text{Surface Heat Flow Rate per Area})*A_{Surface}/A_n$$

โดย $A_{Surface}$ คือพื้นที่ผิวของดาวเคราะห์

A_n คือพื้นที่ผิวด้านล่างของชั้นที่ n

H_n คือความหนาของชั้นที่ n

และ const. เป็นค่าคงตัวโดยในโครงงานนี้จะมีค่าเท่ากับ 1/100

ในชั้นที่เป็นส่วน core จะให้ $T_{n-1} = T_n$

จากนั้นคำนวณหาความดันของชั้นถัดลงมาโดยจะเป็นไปตามสมการนี้

$$P_{n-1} = P_n + (F_{gravity})_n/A_n$$

$$(F_{gravity})_n = G*M_n*(AccM)_n/(R_n+(H_n)/2)^2$$

โดย M_n คือมวลของชั้นที่ n

$(AccM)_n$ คือมวลรวมของทุกชั้นที่อยู่ใต้ชั้นที่ n

R_n คือระยะจากจุดศูนย์กลางจนถึงผิวด้านล่างของชั้นที่ n

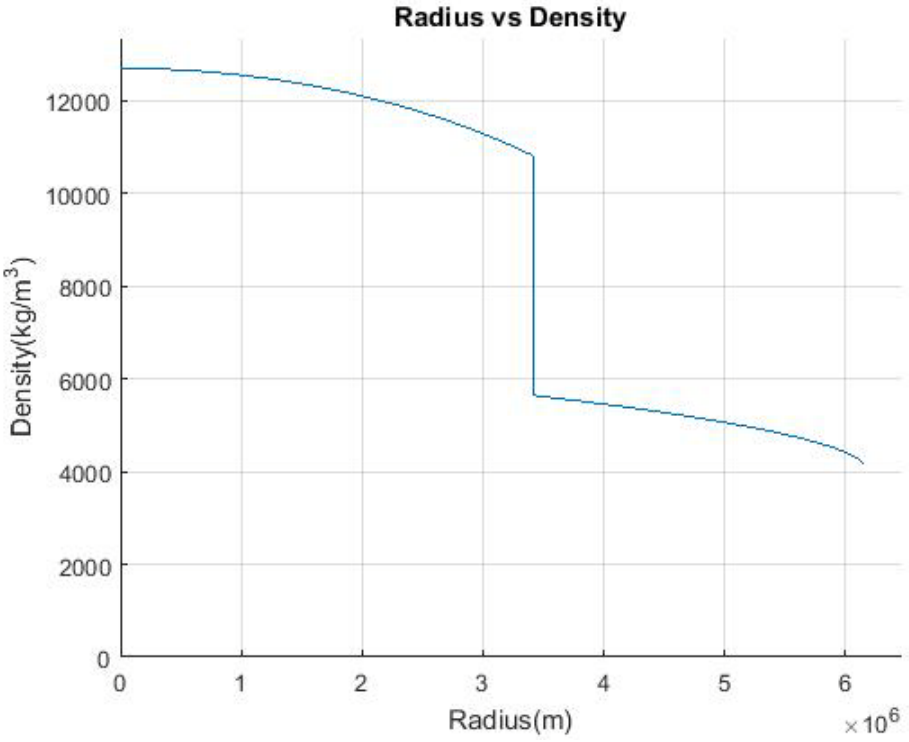
จากนั้นก็นำอุณหภูมิมาคำนวณหา P_{th} นำ P และ P_{th} ไปคำนวณหา P_{eff} แล้วนำค่า P_{eff} ไปคำนวณหาความหนาแน่นโดยใช้สมการ polytropic และนำค่าความหนาแน่นไปคำนวณหา R และ H ของชั้น n-1 เมื่อได้ค่าต่าง ๆ ครบก็จะคำนวณหาค่านั้น ๆ ของชั้นถัด ๆ ไปด้วยกระบวนการเดิมจะถึงชั้นล่างสุด

ในการคำนวณ iteration ถัด ๆ ไปจะใช้ Bisection Method คือ ใน iteration ที่ a ใด ๆ หากการคำนวณค่าพบว่าได้ค่า R_n น้อยกว่า 0 จะหยุดคำนวณและจะให้ $(R_{Total})_{a+1} = (R_{Total})_a + Abs(((R_{Total})_{a-1}-(R_{Total})_a)/2)$ โดย Abs( ) คือฟังก์ชั้นค่าสมบูรณ์ หากคำนวณได้จนถึงชั้นล่างสุดและได้ค่า R มากกว่า 0 จะให้ $(R_{Total})_{a+1} = (R_{Total})_a - Abs(((R_{Total})_{a-1}-(R_{Total})_a)/2)$

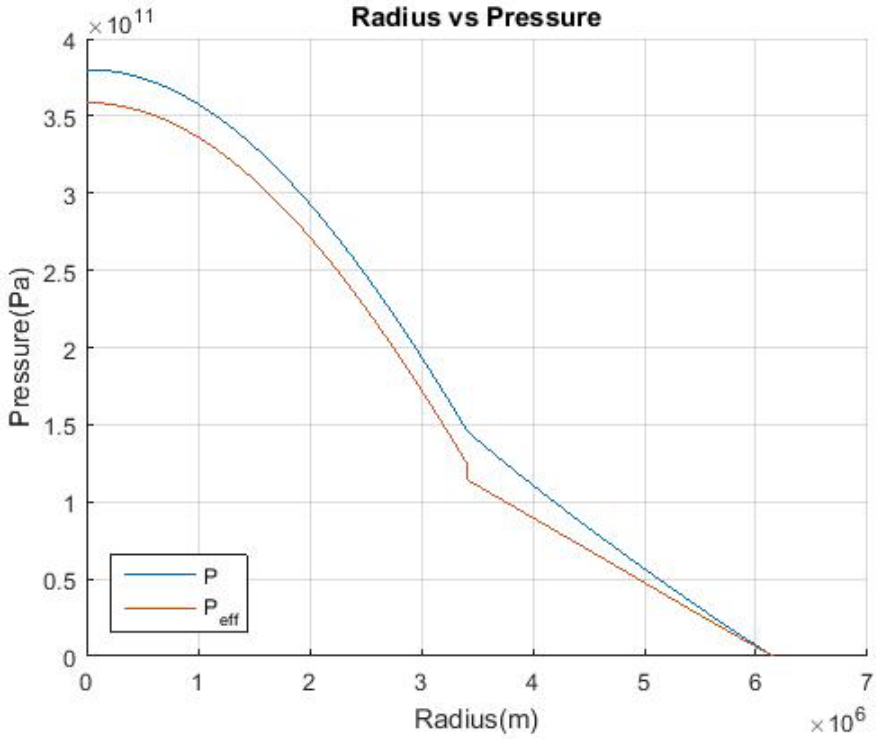
ผลการทดลอง

ในทุกการจำลองจะให้ mantle มีมวล 67.5% และ core มีมวล 32.5%

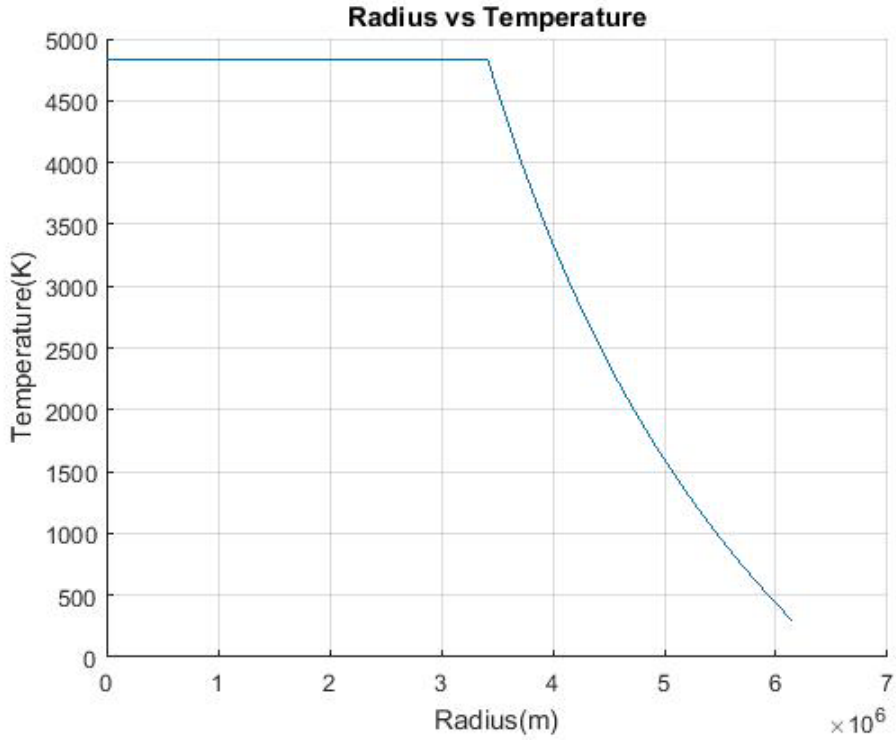
ผลการจำลองที่มวล 1 $M_{\oplus}$ แบ่งเป็น 10000 ชั้นและคำนวณทั้งหมด 100 iteration ได้ R_{Total} = 0.96631 $R_{\oplus}$ และ R_{core} = 55.513% of R_{Total}



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความหนาแน่น

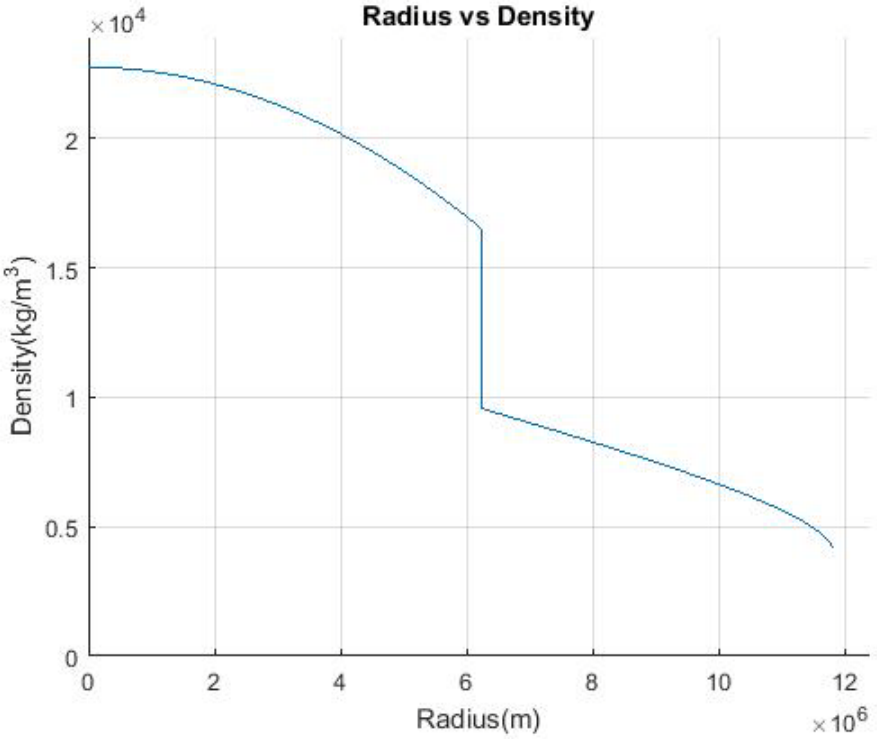


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความดัน

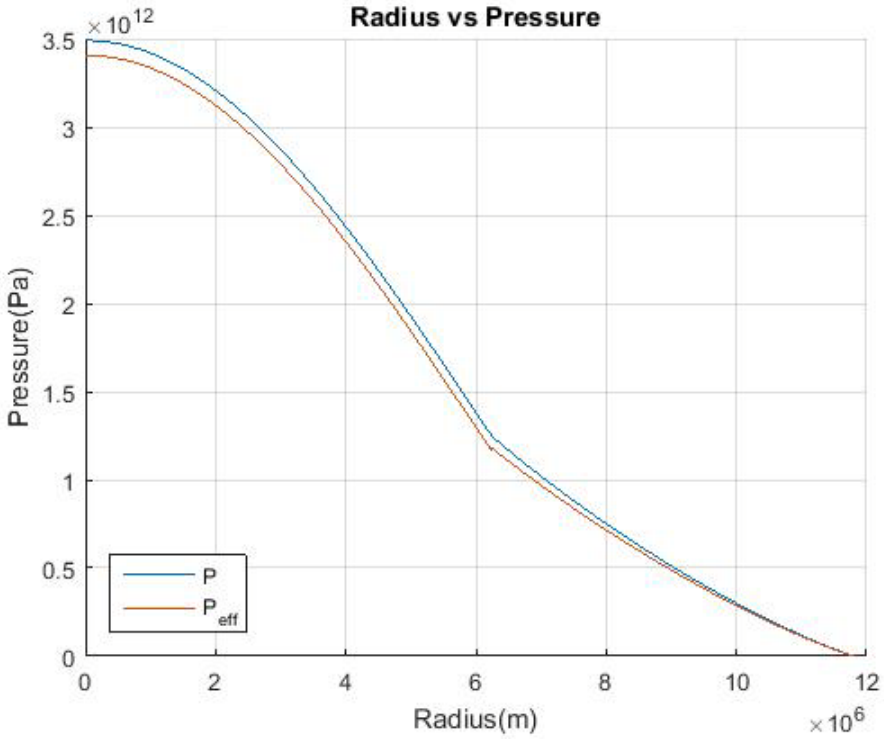


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับอุณหภูมิ

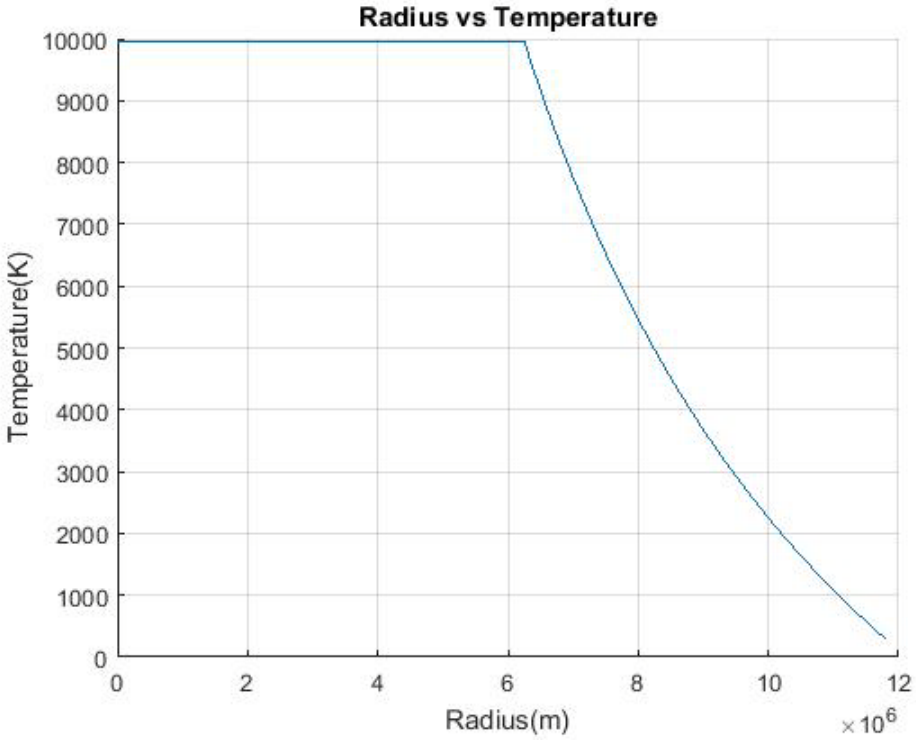
ผลการจำลองที่มวล 10 $M_{\oplus}$ แบ่งเป็น 10000 ชั้นและคำนวณทั้งหมด 100 iteration ได้ R_{Total} = 1.8534 $R_{\oplus}$ และ R_{core} = 52.918% of R_{Total}



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความหนาแน่น

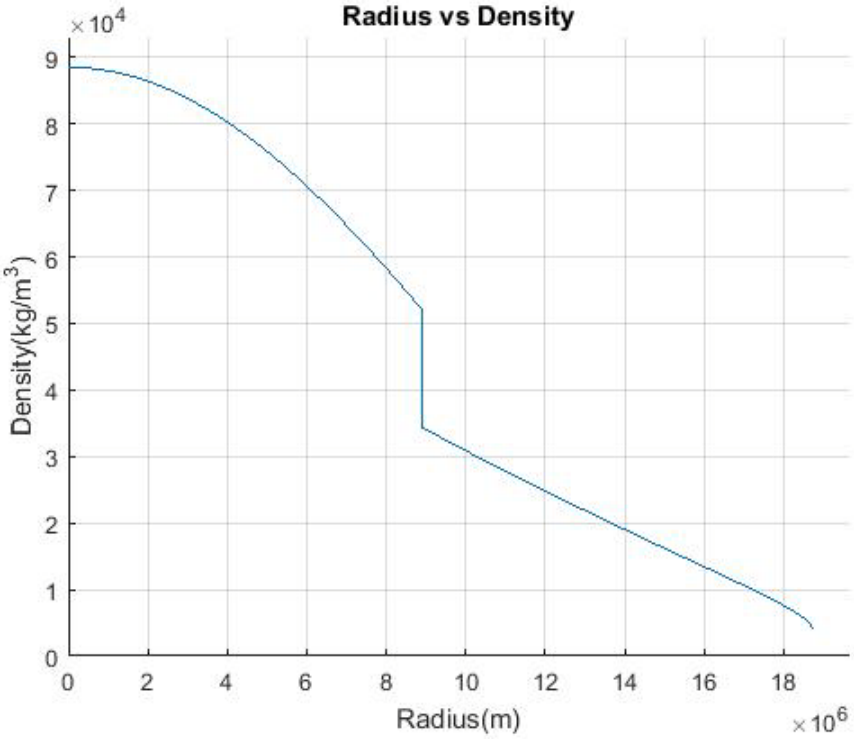


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความดัน

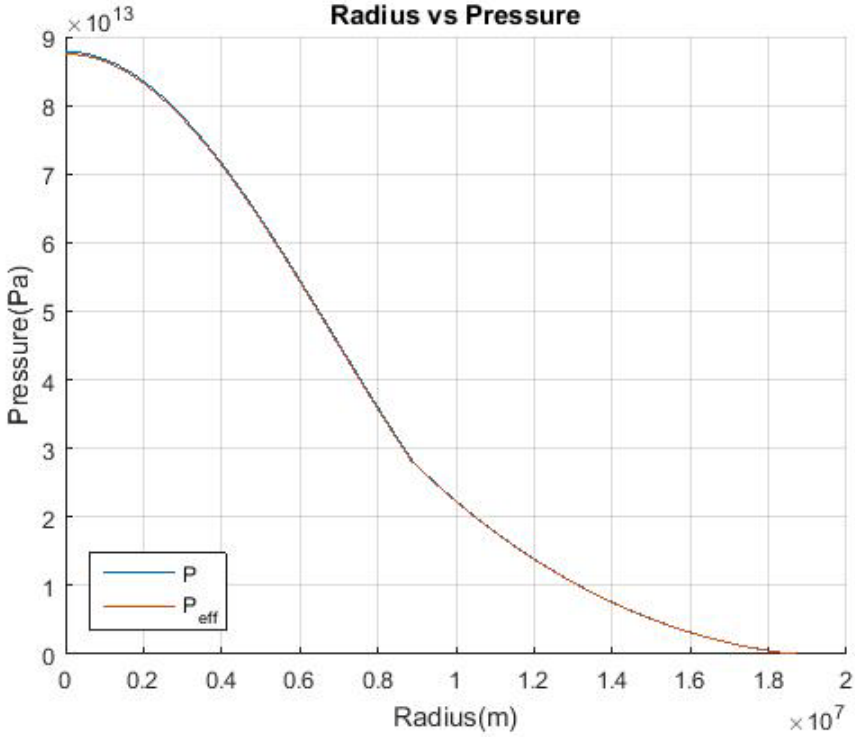


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับอุณหภูมิ

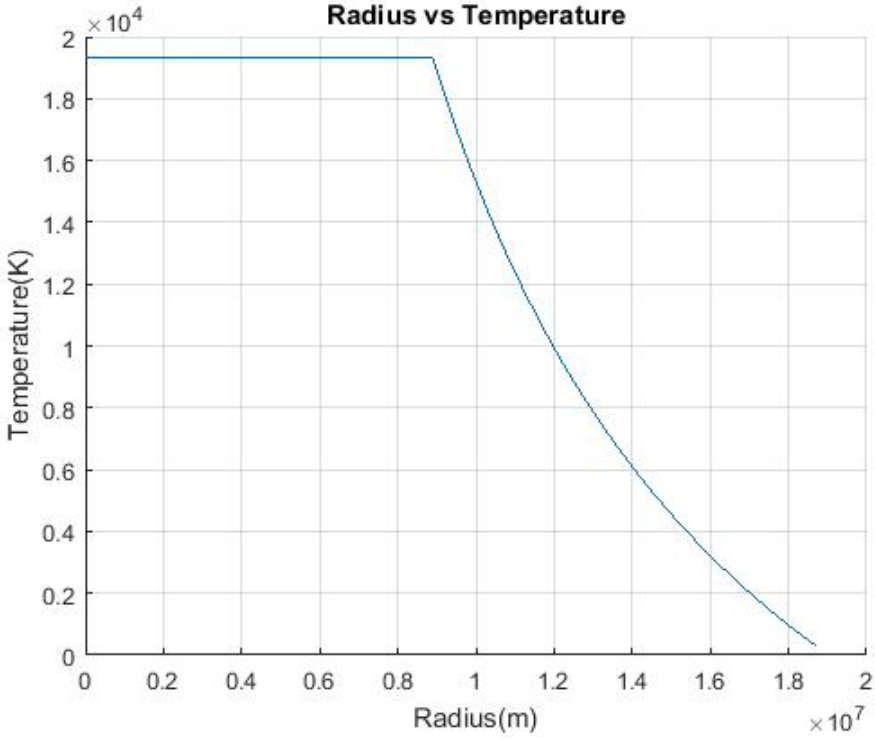
ผลการจำลองที่มวล 100 $M_{\oplus}$ แบ่งเป็น 10000 ชั้นและคำนวณทั้งหมด 100 iteration ได้ R_{Total} = 2.9384 $R_{\oplus}$ และ R_{core} = 47.537% of R_{Total}



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความหนาแน่น

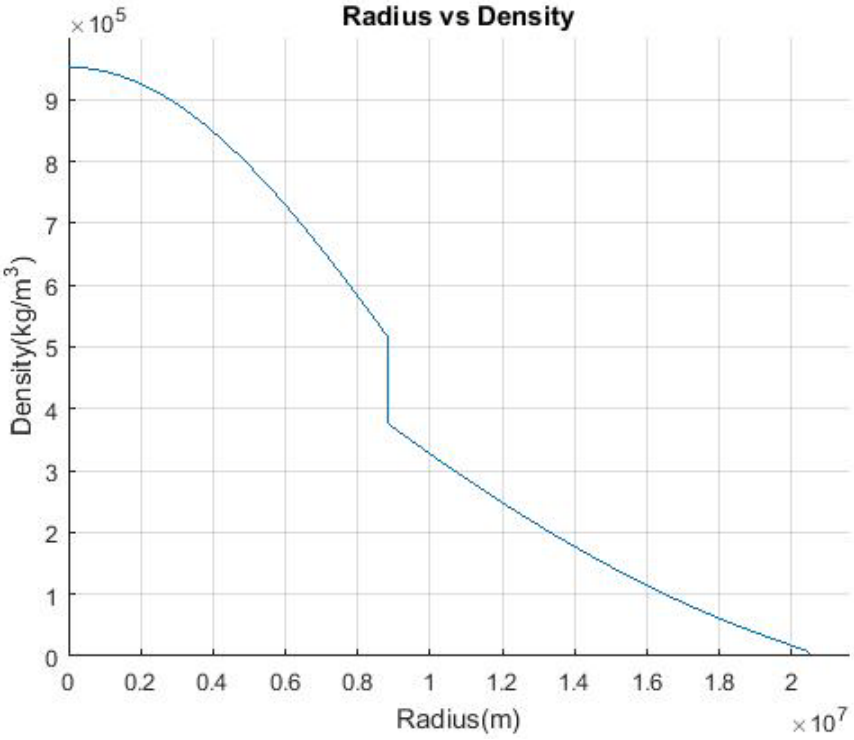


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความดัน

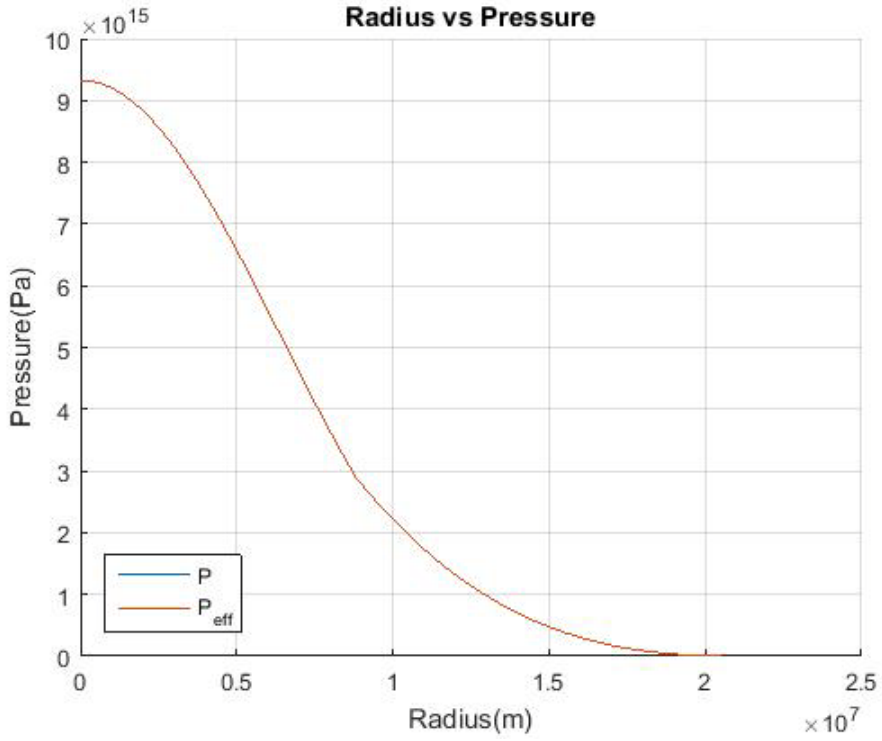


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับอุณหภูมิ

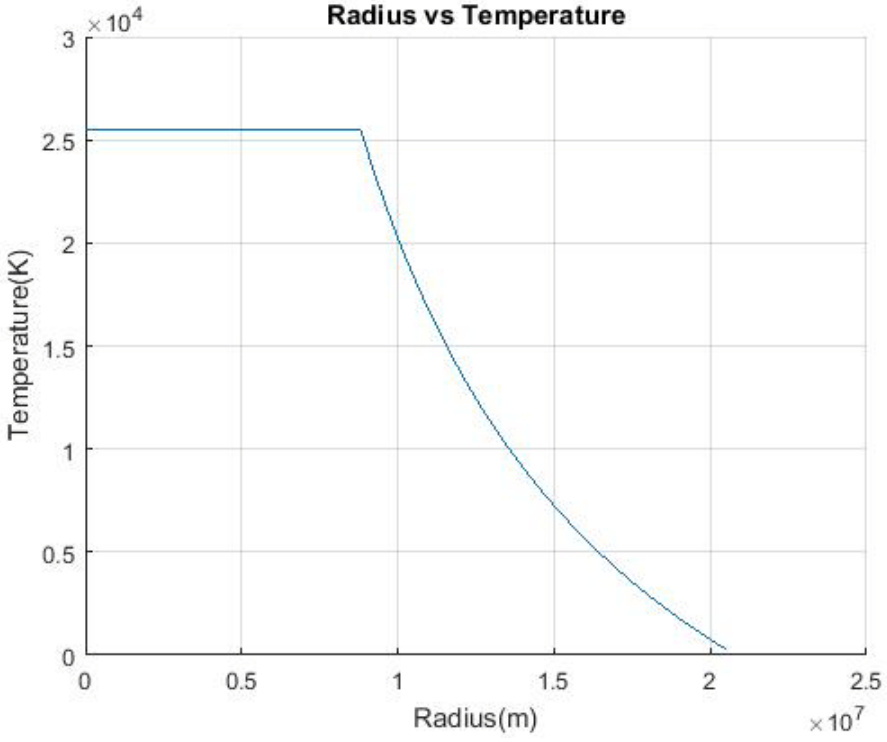
ผลการจำลองที่มวล 1000 $M_{\oplus}$ แบ่งเป็น 10000 ชั้นและคำนวณทั้งหมด 100 iteration ได้ R_{Total} = 3.2282 $R_{\oplus}$ และ R_{core} = 42.858% of R_{Total}



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความหนาแน่น

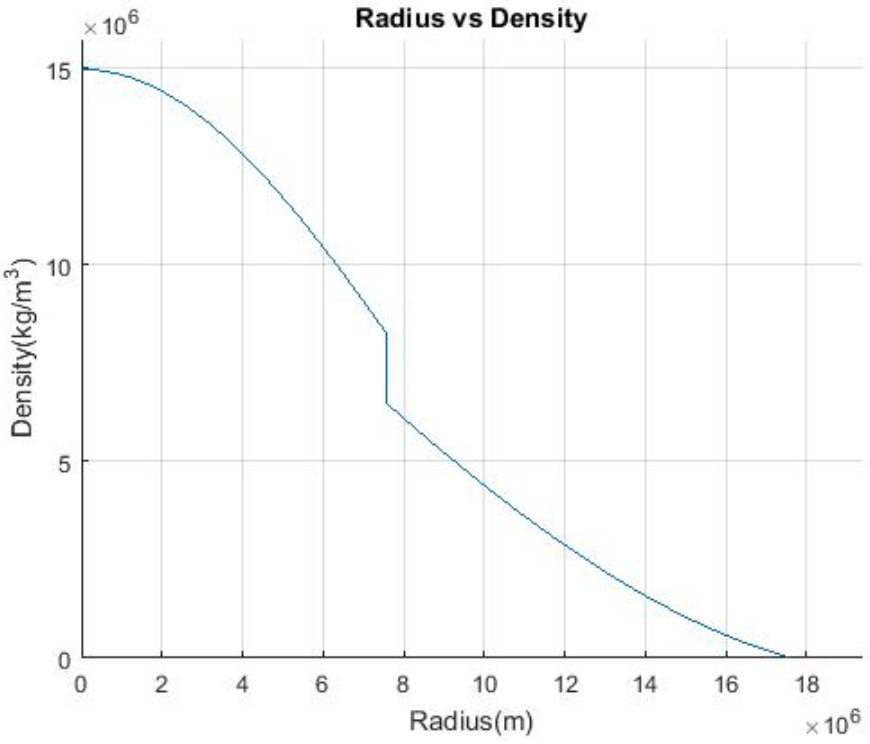


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความดัน

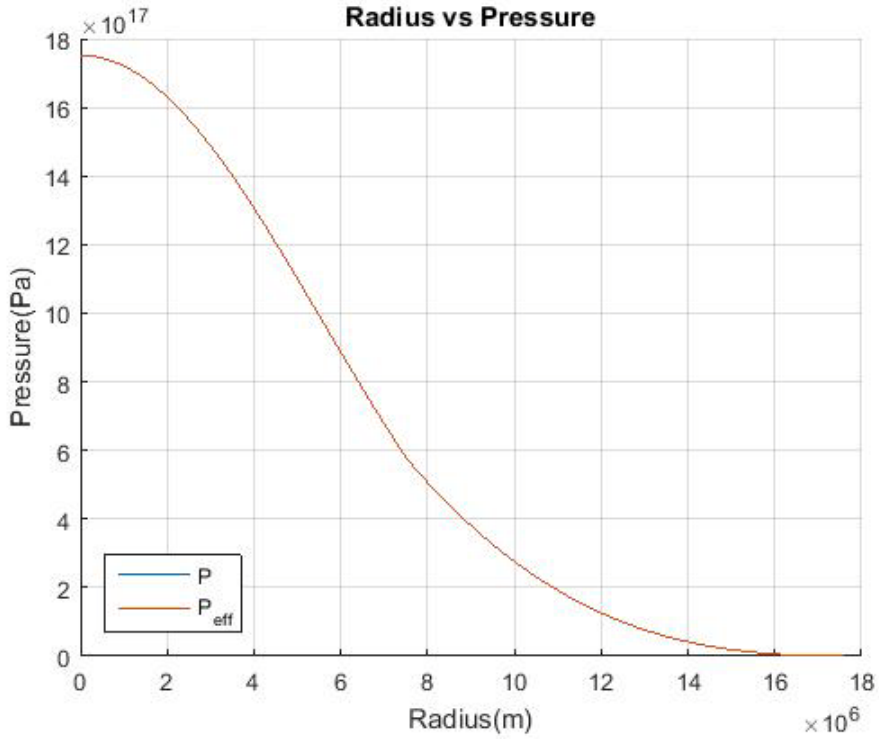


กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับอุณหภูมิ

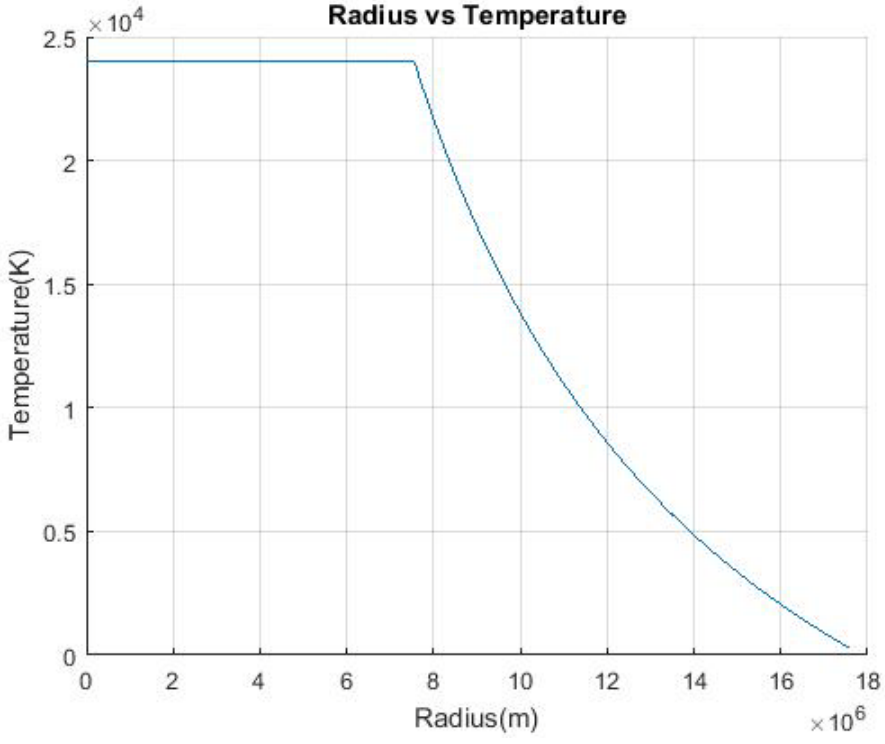
ผลการจำลองที่มวล 10000 $M_{\oplus}$ แบ่งเป็น 10000 ชั้นและคำนวณทั้งหมด 100 iteration ได้ R_{Total} = 2.8986 $R_{\oplus}$ และ R_{core} = 40.919% of R_{Total}



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความหนาแน่น



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความดัน



กราฟความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับอุณหภูมิ

สรุป

จากผลการจำลองพบว่าที่มวล 1 $M_{\oplus}$ ได้ R_{Total} = 0.96631 $R_{\oplus}$ มีค่า $(R_{Total})_{error}$ = 3.369% เมื่อเทียบกับค่าจริง(R_{Total} = 1 $R_{\oplus}$) ได้ R_{core} 55.513% of R_{Total} มีค่า $(R_{core})_{error}$ = 1.4677% เมื่อเทียบกับค่าจริง(R_{Total} = 54.71% of R_{Total}) ในส่วนของความหนาแน่นได้ค่า 4.1321×10^3 kg/m^3 ถึงค่า 5.6446×10^3 kg/m^3 สำหรับ mantle และ 1.0813×10^4 kg/m^3 ถึงค่า 1.2702×10^4 kg/m^3 สำหรับ core เมื่อเทียบกับค่าประมาณจริงดังตารางนี้

Depth km	Component layer	Density g/cm^3
0–60	Lithosphere	—
0–35	Crust	2.2–2.9
35–660	Upper mantle	3.4–4.4
660-2890	Lower Mantle	3.4–5.6
100–700	Asthenosphere	—
2890–5100	Outer core	9.9–12.2
5100–6378	Inner core	12.8–13.1

ตาราวค่าประมาณจริง

(https://en.wikipedia.org/wiki/Earth)

พบว่าความหนาแน่นในส่วน core ที่ได้มีค่า error เฉลี่ยน้อยกว่า 10% สำหรับในส่วน mantle เนื่องจากในการจำลองได้คิดเอาส่วน crust ไปรวมกับ mantle ซึ่ง crust ในความจริงมีองค์ประกอบทางเคมีต่างจาก mantle ทำให้ความหนาแน่นในส่วน mantle ชั้นบนที่ได้มีต่างไปจากค่าความหนาแน่นประมาณจริงของ crust อยู่มาก

ในส่วนของอุณหภูมิได้ T_{core} = 4831.8 K เมื่อเทียบกับค่าประมาณจริงคือ 3000-8000 K โดยมีค่าเฉลี่ยที่ 4250 K (เนื่องจาก core เป็นทรงกลม 3

มิติจึงต้องหาค่าเฉลี่ยโดยการอินทิเกรตไม่สามารถนำมาบวกกันแล้วหารด้วย 2 ตรง ๆ ได้) พบว่าค่าที่ได้มี error เป็น 13.69% เทียบกับค่าเฉลี่ย ซึ่งถือว่าได้ค่าอุณหภูมิที่ได้จากการประมาณมีค่าไม่ต่างจากค่าจริงมากเกินไปนัก

จากผลการทดลองที่มวลมากกว่า 1 $M_{\oplus}$ พบว่ารัศมีจะเพิ่มขึ้นเมื่อมวลเพิ่มขึ้นแต่จะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลงจนรัศมีจะมีค่ามากที่สุดประมาณ 3.23 $R_{\oplus}$ ที่มวลประมาณ 1000 $M_{\oplus}$ ในกรณีที่มวลมากกว่านั้นรัศมีจะลดลงเมื่อมวลเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่ารัศมีของ core จะลดลงเมื่อมวลเพิ่มขึ้น แม้จะมีส่วนสัดส่วนมวลของ mantle และ core เท่ากันเพราะเมื่อมวลเพิ่มขึ้นจะมีความดันที่ core สูงขึ้นส่งผลให้ core มีความหนาแน่นมากขึ้นและมีปริมาตรลดลง

สำหรับผลการจำลองพบว่าที่มวลมากกว่า 1 $M_{\oplus}$ เนื่องจากไม่มีข้อมูลในส่วนสัดส่วนมวลของ mantle และ core ของ exoplanet รวมทั้งมวลและรัศมีมีความคลาดเคลื่อนสูง จึงไม่สามารถที่จะนำเปรียบเทียบให้เห็นชัดเจนได้

บรรณานุกรม

https://en.wikipedia.org/wiki/Exoplanet

https://en.wikipedia.org/wiki/Terrestrial_planet

M. Haselsteiner. Influence of Temperature- and Depth-dependent Thermal Expansion Coefficient on Subduction Initiation. 2015. Available from: https://www.researchgate.net/publication/312195609_Influence_of_Temperature-_and_Depth-dependent_Thermal_Expansion_Coefficient_on_Subduction_Initiation

https://en.wikipedia.org/wiki/Earth

https://en.wikipedia.org/wiki/Earth%27s_mantle

https://en.wikipedia.org/wiki/Abundance_of_the_chemical_elements#Earth

S. Seager, M. Kuchner, C. A. Hier-Majumder, B. Militzer. Mass-radius relationships of rocky exoplanets. Proceedings of the International Astronomical Union, Volume 8, Issue S293, August 2012, Pages 350-355. Available from: https://arxiv.org/pdf/0707.2895v1.pdf