Complex Number

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 13 August 2020

Closure of a Number System

จำนวนนับ $\{1, 2, 3, \ldots\}$

สมบัติปิดของการบวก ลบ ?

" ———— " คูณ หาร ?

$\Downarrow$

Integer $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
จำนวนเต็ม

บวก ✓
ลบ ✓
คูณ ✓

หาร ?

$\Downarrow$

Rational Number $\left\{ \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{I} \right\}$
ตรรกยะ

บวกลบ ✓
คูณหาร ✓

$x^2 = 2$?
π, e ?

$\Downarrow$

Real Number
จำนวนจริง

$x^2 = -1$?
$\sin x = 2$?

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Complex Number}}$

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

$$z = x + iy$$

เชิงซ้อน

ส่วนจริง (Real Part)

ส่วนจินตภาพ (Imaginary Part)

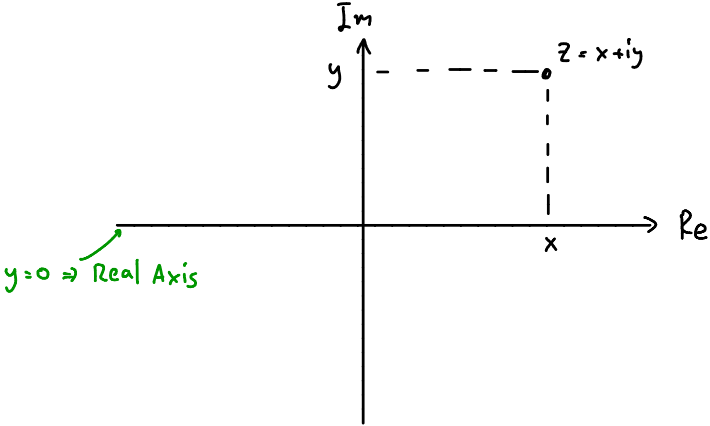
$$\left[\begin{array}{l} i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1} \\ x, y \text{ เป็น Real Number} \end{array}\right]$$

ถ้า $y = 0 \Rightarrow z$ เป็น Real Number

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

เชิงซ้อน = จำนวนจริง 2 จำนวน

ระนาบเชิงซ้อน (Complex Plane)



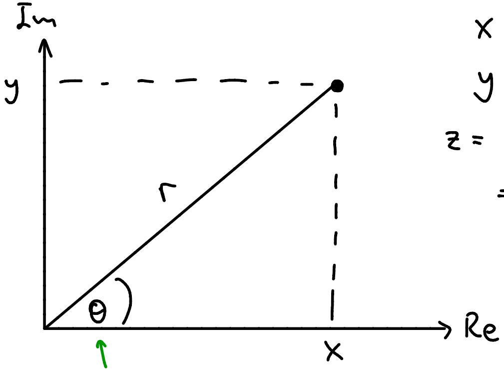
$z = x + iy$

รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน (Polar Form)

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Cartesian

Polar form



θ วัดทวนเข็มจากแกน x

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

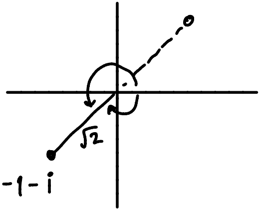
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

ระวัง $\Rightarrow$ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$z = -1 - i$$



$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = 225^\circ = \frac{5\pi}{4}$$

$$\left(= -135^\circ = -\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = 45^\circ$$

$$\arctan2(x, y)$$

สรุปนิยามศัพท์ทั้งหลาย

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

x = Real Part

y = Imaginary Part

r = Modulus (Absolute value)

θ = Argument (Phase)

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Euler's Formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

พีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (Complex Arithmatic)

1 พีชคณิตธรรมดา i เป็นตัวแปร

2 $i^2 = -1$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $z_1 = 2 + 3i$ และ $z_2 = 1 - i$ จงหา $z_1 + z_2$ และ $3z_1 + 5z_2$

$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (1-i)$$
$$= 3 + 2i$$

$$3z_1 + 5z_2 = 3(2+3i) + 5(1-i)$$
$$= 6 + 9i + 5 - 5i$$
$$= 11 + 4i$$

ตัวอย่าง จงหา $(2+3i) \times (1-i)$

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (2+3i)(1-i) \\
&= 2 - 2i + 3i - 3i^2 \\
&= 2 - 2i + 3i - 3(-1) \\
&= 5 + i
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = a - bi$ จงหา $z_1 \times z_2$

$$z_1 z_2 = (a+bi)(a-bi)$$

$$= a^2 - \cancel{ab}i + \cancel{ab}i - \underbrace{b^2 i^2}_{+b^2}$$

$$= a^2 + b^2$$

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

Complex conjugate

สังยุค

$$\underbrace{z\bar{z}}_{\text{Real number!}} = a^2 + b^2 = r^2 = |z|^2$$

$$e^{i\theta} = \cos + i\sin$$

$$e^{-i\theta} = \cos - i\sin\theta$$

$$z = \frac{2+3i}{4-5i} e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \bar{z} = \frac{2-3i}{4+5i} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

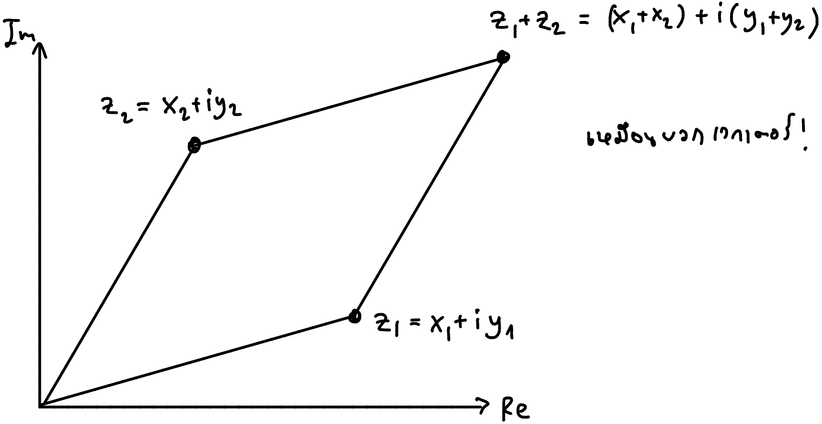
ตัวอย่าง จงหา $\frac{2+3i}{1-i}$

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$$

การบวกลบบนระนาบเชิงซ้อน

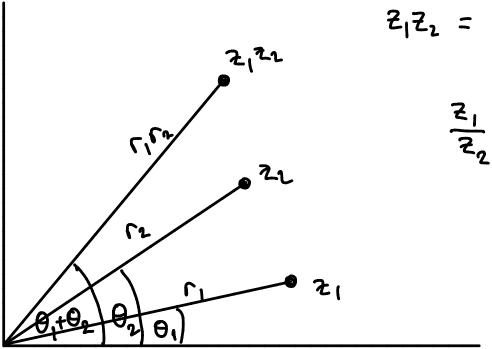


การคูณหารบนระนาบเชิงซ้อน

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2})$$

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$$

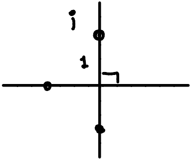
$$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา i^{30}

$$i = 0 + 1i$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}}$$



$$i^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = -1$$

$$i^3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

$$i^4 = e^{i2\pi} = 1$$

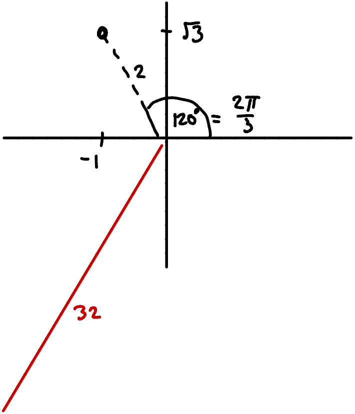
$$i^{30} = e^{i15\pi} = -1$$

ตัวอย่าง จงหา $(-1+\sqrt{3}i)^5$

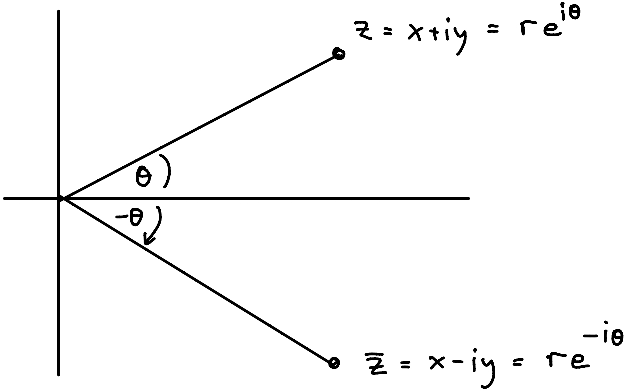
$$-1+\sqrt{3}\,i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$(-1+\sqrt{3}\,i)^5 = 2^5 e^{i\frac{10\pi}{3}}$$

$$= 32\,e^{i\frac{4\pi}{3}}$$



Complex Conjugate



Modulus of Complex Number

จงหา $|z|$, $z = \dfrac{(1+i)^{50}}{(1-i)^{30}}$

$$|z| = \frac{|1+i|^{50}}{|1-i|^{30}} = \frac{(\sqrt{2})^{50}}{(\sqrt{2})^{30}} = 1024$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\begin{aligned}|z_1 z_2| &= \left| r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \right| \\ &= \left| r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \right| \\ &= r_1 r_2 \\ &= |z_1||z_2|\end{aligned}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$e^{i(n\theta)}$$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$n = 2$:
$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^2$$

$$= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\sin\theta)$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$n = 3$
$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (c + is)^3$$

$$= c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$$

$$= (c^3 - 3cs^2) + i(3c^2s - s^3)$$

Quiz

1. จงเขียน $z = (-\sqrt{3}+1)^2$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว
2. จงเขียน $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว
3. จงเขียน $z = (i-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}i)$ ในรูป $x+iy$
4. จงเขียน $z = e^{-2\pi i} + e^{-4\pi i} + e^{6\pi i}$ ในรูป $x+iy$
5. จงหา $|z|$ เมื่อ $z = \left(\frac{\sqrt{2}i}{1-i}\right)^{12}$