Complex Number (2)

- ยกกำลัง + ราก
- exponential + log
- trigonometry + inv.
- ยกกำลัง

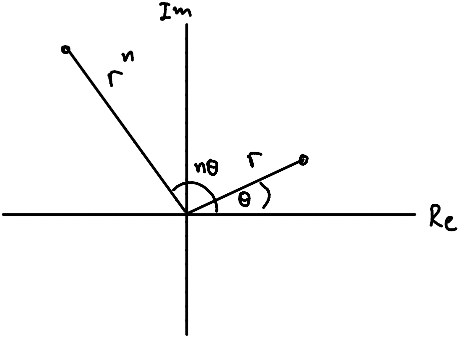
Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 20 August 2020

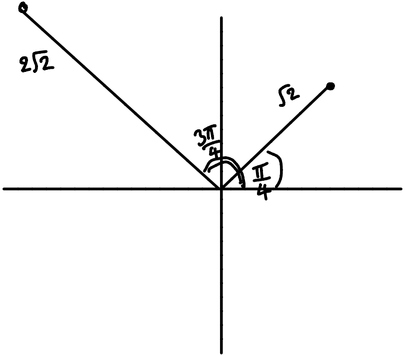
การยกกำลังจำนวนเชิงซ้อน

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{i(n\theta)}$$



ตัวอย่าง จงหา $(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$



$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -2 + 2i$$

รากของจำนวนเชิงซ้อน

$$z = re^{i\theta}$$

หา $w = z^{1/n}$ รากที่ n ของ z

$$\Rightarrow w^n = z$$

$$z^{1/n} = \left(re^{i\theta}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}$$

มีหลายค่า!

ตัวอย่าง จงหา $\sqrt[3]{8}$

$$8 = 8e^{i\theta} \quad , \quad \theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$$

$$= 2\pi n \quad , \quad n \in \mathbb{I}$$

$$\sqrt[3]{8} = (8e^{i\theta})^{1/3} = 2e^{i\frac{\theta}{3}} \quad , \quad \theta = 2\pi n, \; n \in \mathbb{I}$$

$$= \underbrace{2e^{i0}} , \underbrace{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} , \underbrace{2e^{i\frac{4\pi}{3}}} , \underbrace{2e^{i\frac{6\pi}{3}}}_{= 2e^{i2\pi} = 2e^{i0}} , \underbrace{2e^{i\frac{8\pi}{3}}}_{= 2e^{i\frac{2\pi}{3}}} , \ldots$$

ไม่ซ้ำ

\sqrt{8} ⇒ $\sqrt{8}$

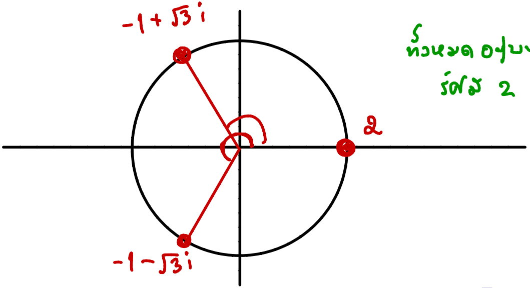
\sqrt[3]{8} ⇒ $\sqrt[3]{8}$

$$\sqrt[3]{8} = 2e^{i0},\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 2,\ 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2,\ 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$$



ทั้งหมดอยู่บนวงกลม
รัศมี 2

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\sqrt[4]{-16}$

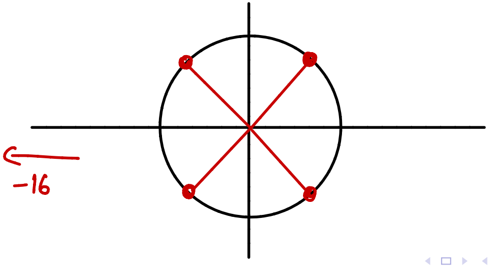
$$-16 = 16e^{i\theta}, \quad \theta = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots, -\pi, -3\pi, \ldots$$

$$= \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{I}$$

$$\sqrt[4]{-16} = 2e^{i\frac{\theta}{4}}$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{2}i, -\sqrt{2}+\sqrt{2}i, -\sqrt{2}-\sqrt{2}i, \sqrt{2}-\sqrt{2}i$$



<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\sqrt{1+i}$

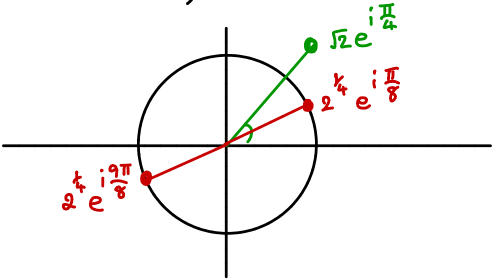
$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\theta} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}+2\pi, \frac{\pi}{4}+4\pi, \dots$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad , \quad n \in \mathbb{I}$$

$$\sqrt{1+i} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\theta}\right)^{1/2}$$

$$= 2^{1/4}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2^{1/4}\, e^{i\frac{\pi}{8}} \, , \, 2^{1/4}\, e^{i\frac{9\pi}{8}}$$



สรุปวิธีหารากของจำนวนเชิงซ้อน

เชิงพีชคณิต

- $z = re^{i\theta}$

$$= re^{i\theta}, \; re^{i(\theta+2\pi)}, \; re^{i(\theta+4\pi)}, \; \ldots$$

$$= re^{i(\theta+2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{I}$$

- $z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}, \; r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}, \; \ldots$

$$= r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\boxed{\frac{2\pi k}{n}}\right)}, \quad k \in \mathbb{I}$$

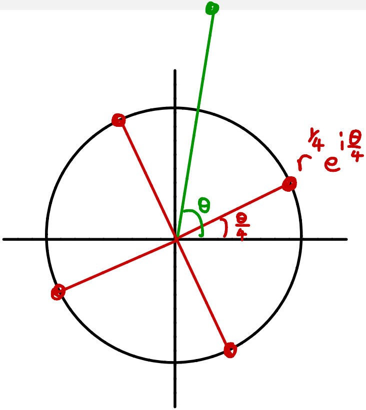
- k มา n ค่าที่ติดกัน $\Rightarrow$ $z^{1/n}$ มา n ค่าที่ไม่ซ้ำกัน

สรุปวิธีหารากของจำนวนเชิงซ้อน

เชิงเรขาคณิต

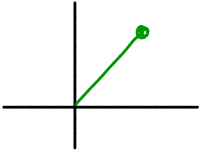
- $z = re^{i\theta}$, θ ค่าเดียว
- $z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\frac{\theta}{n}}$ $\Rightarrow$ ได้ 1 ราก
- แบ่งวงกลมเป็น n ส่วน

  $\Rightarrow$ ได้ n ราก



$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)^{1/n} = (\sqrt{2})^{1/n} e^{i\frac{\pi}{4n}}$$



ฟังก์ชัน exponential ของจำนวนเชิงซ้อน

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

$$e^{z} = e^{x+iy}$$

$$= e^{x} e^{iy}$$

$$= e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{x+iy} = e^{x}\cos y + i e^{x} \sin y$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา e^{1+i}

$$
\begin{aligned}
e^{1+i} &= e^{1}e^{i} \\
&= e(\cos 1 + i\sin 1) \\
&= 2.718(0.54 + i \times 0.84) \\
&= 1.4 + 2.3i
\end{aligned}
$$

1 เป็น radian

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเชิงซ้อน

Trigonometry

$z \Rightarrow$ หา $\sin z, \cos z$?

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad -(1)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \quad -(2)$$

$(1)+(2)$ $\quad 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$

$(1)-(2)$ $\quad 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

นิยาม

$$\boxed{\begin{aligned} \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\ \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \end{aligned}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\cos(i)$

$$\cos i = \frac{1}{2}\left(e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-1} + e^{+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \approx 1.54 \quad > 1 \; !$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\ln 2\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+i\ln 2\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i}\ \underbrace{e^{-\ln 2}}_{\Downarrow\ e^{\ln 2^{-1}} = \frac{1}{2}} - \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i}\ \underbrace{e^{\ln 2}}_{\Downarrow\ 2}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{i}{2} + 2i\right]$$

$$= \frac{5}{4} > 1 \ !$$

$$e^{[\ldots]} \Rightarrow \exp(\ldots)$$

\exp

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ?

$$\left.\begin{aligned} &\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \\ &\frac{d\sin z}{dz} = \cos z \\ &\frac{d\cos z}{dz} = -\sin z \end{aligned}\right\}$$

พิสูจน์ได้ตามนิยาม

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \ldots$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\int \sin^2 x\, dx$

$$= \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2i} e^{2ix} - 2x - \frac{1}{2i} e^{-2ix} \right] + C$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{2ix} - e^{-2ix} \right) + C$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \cos 5x \sin 3x\, dx = ?$$

ตัวอย่าง จงหา $\int_0^{2\pi} \sin x \sin 2x \, dx$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(e^{3ix} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{3ix} \right) dx$$

sin x

cos 3x

$$= 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ และ $\int e^{ax}\sin bx\,dx$

พิจารณา $e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx = \boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx} + i\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx}$$

$\downarrow$

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx = \frac{1}{a+ib}e^{(a+ib)x} + C$$

$$= \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib}\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2}\,e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$= \boxed{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)} + i\boxed{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)}$$

ฟังก์ชัน logarithm ของจำนวนเชิงซ้อน

$z = re^{i\theta}$ หา $\ln z = ?$

$w = \ln z \Rightarrow e^{w} = z$

$$\ln z = \ln\left(re^{i\theta}\right)$$

$$= \ln r + i\theta$$ ⇐ θ มีหลายค่า !

$z = re^{i(\theta + 2\pi k)}$, $k \in \mathbb{I}$

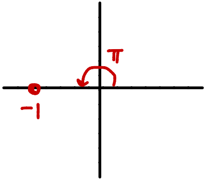
$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi k)$$

$$= \mathrm{Ln}(r) + i(\theta + 2\pi k)$$

เน้นว่าเป็น Real

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\ln(-1)$

$$-1 = 1\, e^{i(\pi + 2\pi n)}$$



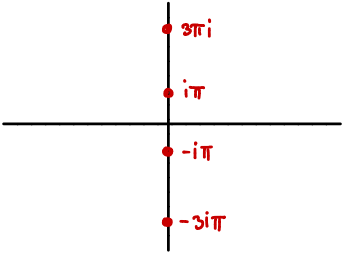
$$\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi n)$$

$$= i(\pi + 2\pi n)$$

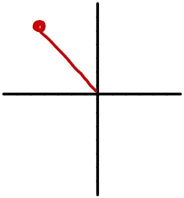
$$= \boxed{i\pi}, 3i\pi, 5i\pi, \ldots, -i\pi, -3i\pi, \ldots$$

Principal value

$0 \leq \theta < 2\pi$



<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\ln(-1+i)$



$$-1+i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)}, \quad k \in \mathbb{I}$$

$$\ln(-1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$$

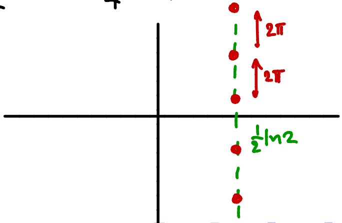
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4} i}, \quad \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{11\pi}{4} i, \quad \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{19\pi}{4} i, \ldots$$

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5\pi}{4} i, \quad \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{13\pi}{4} i, \quad \ldots$$

Principal value

$0 \leqslant \theta < 2\pi$



ตัวอย่าง จงหา $\ln 5$

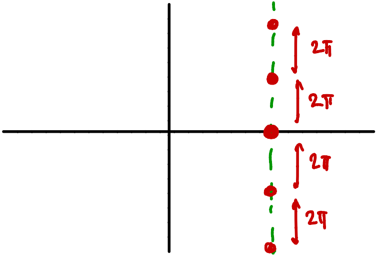
$$5 = 5e^{i(2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\ln 5 = \mathrm{Ln}\, 5 + i(2\pi k)$$

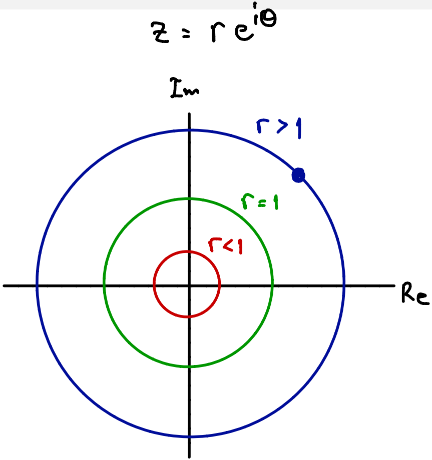
$$= \mathrm{Ln}\, 5,\ \mathrm{Ln}\, 5 + 2\pi i,\ \mathrm{Ln}\, 5 + 4\pi i, \ldots$$

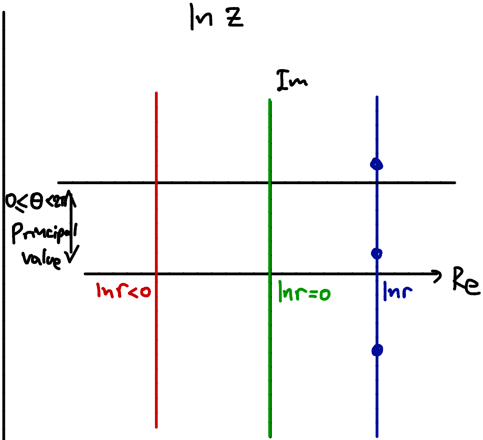
$$\mathrm{Ln}\, 5 - 2\pi i,\ \mathrm{Ln}\, 5 - 4\pi i, \ldots$$

Principal value



ฟังก์ชัน logarithm ของจำนวนเชิงซ้อน





Quiz

1. จงหาค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ $\sqrt[3]{-8i}$

2. จงเขียน $\cos(\pi - 2i\ln 3)$ ในรูป $x + iy$

3. ~~จงเขียน $(i-1)^{(i+1)}$ ในรูป $x + iy$~~