

Complex Number (3) & Partial Derivative

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 20 August 2020

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันของจำนวนเชิงซ้อน

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$$

ฉ) $w = \arccos z = ? \quad \Rightarrow \quad \cos w = z$

$$\downarrow$$
$$\frac{1}{2} (e^{iw} + e^{-iw}) = z$$

$$\downarrow$$

แก้สมการหา w

ตัวอย่าง จงหา $\arccos 2 = z \Rightarrow$ ค้นหา z ให้ $\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 2$

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 2$$

$$\text{ให้ } u = e^{iz}$$

$$\frac{1}{u} = e^{-iz}$$

$$\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = 2$$

$$u^2 + 1 = 4u$$

$$u^2 - 4u + 1 = 0$$

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$iz = \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$= \ln((2 \pm \sqrt{3}) e^{i2\pi n}) , n \in \mathbb{I}$$

$$iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i2\pi n$$

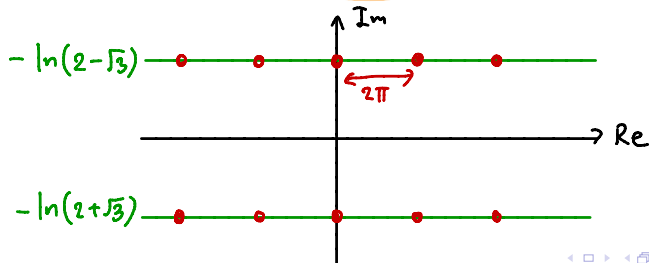
$$z = \frac{1}{i} \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi n$$

$$z = 2\pi n - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$\frac{1}{i} \times \frac{1}{i} = -1$$



$$\text{เงื่อนไข} \quad z = 2\pi n \pm i \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow \cos z$$

$$\cos z = \frac{1}{2} \left[e^{i(2\pi n \pm i \ln(2+\sqrt{3}))} + e^{-i(2\pi n \pm i \ln(2+\sqrt{3}))} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{e^{i2\pi n}}_{=1} e^{\mp \ln(2+\sqrt{3})} + \underbrace{e^{-i2\pi n}}_{=1} e^{\pm \ln(2+\sqrt{3})} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[(2+\sqrt{3})^{\mp 1} + (2+\sqrt{3})^{\pm 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2+\sqrt{3}} + 2+\sqrt{3} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[2-\sqrt{3} + 2+\sqrt{3} \right] = 2$$

$\backslash pm \quad \pm$

$\backslash mp \quad \mp$

ตัวอย่าง จงหา $\arccos \frac{1}{2}$ [คำตอบ = $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$]



$$\cos z = \frac{1}{2} [e^{iz} + e^{-iz}] = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{แก้หา } z$$

$$e^{iz} + e^{-iz} = 1$$

$$e^{2iz} + 1 = e^{iz}$$

$$e^{2iz} - e^{iz} + 1 = 0$$

$$e^{iz} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

กรณี $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

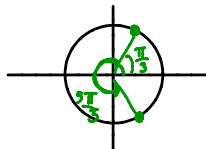
$$e^{iz} = e^{i(\frac{\pi}{3} + 2\pi n)}$$

$$z = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

กรณี $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

$$e^{iz} = e^{i(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n)}$$

$$z = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$$



$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i(\frac{\pi}{3} + 2\pi n)}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = e^{i(\frac{5\pi}{3} + 2\pi n)}$$

จำนวนเชิงซ้อนยกกำลังด้วยจำนวนเชิงซ้อน

หา $a^b = ?$ โดยที่ a, b เป็น complex

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a}$$

นิยาม $a^b = e^{b \ln a}$

ตัวอย่าง จงหา i^i

$$a^b = e^{b \ln a}$$

$$i^i = e^{i \ln i}$$

$$\ln i = \ln \left[e^{i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)} \right]$$
$$= i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)$$



$$i^i = e^{i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)}$$
$$= e^{- \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right)}$$

$$= e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{-\frac{5\pi}{2}}, e^{-\frac{9\pi}{2}}, \dots, e^{\frac{3\pi}{2}}, e^{\frac{7\pi}{2}}, \dots$$

$n=0 \quad n=1 \quad n=2 \quad n=-1 \quad n=-2$

i^i เป็น $\mathbb{R}$ มี infinite ค่า !

ตัวอย่าง จงหา $i^{1/2}$

$$\sqrt{i} = ?$$

$$i^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \ln i}$$

$$= e^{\frac{1}{2} i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)}$$

$$= e^{i \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right)}$$

$$= e^{i \frac{\pi}{4}}, e^{i \frac{5\pi}{4}}, e^{i \frac{9\pi}{4}}, \dots, e^{-i \frac{3\pi}{4}}, e^{-i \frac{7\pi}{4}}, \dots$$

$n=0$

1

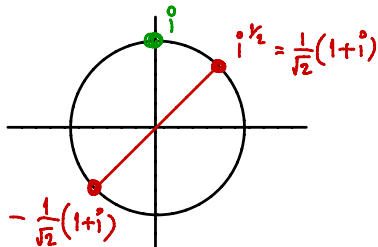
ไม่ซ้ำ

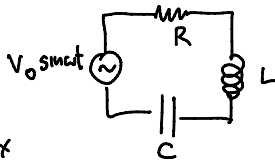
2

-1

-2

ทั้งหมด 2 อย่าง





charge q complex

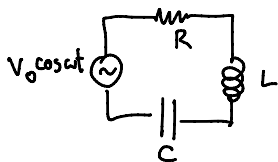
$$V_C = \frac{q}{C}$$

$$V_R = IR = R \frac{dq}{dt}$$

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$V_0 \sin \omega t = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

ODE order 2



q_r complex

$$q_r = q_0 \cos \omega t = \text{Re}(q_0 e^{i\omega t}) \quad [\text{sum}]$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \text{Re}[i\omega q_0 e^{i\omega t}]$$

$$\frac{dI}{dt} = \text{Re}[-\omega^2 q_0 e^{i\omega t}]$$

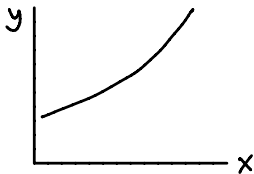
$$V = \text{Re}[V_0 e^{i\omega t}]$$

$$V = L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} \Rightarrow V_0 e^{i\omega t} = [-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}] q_0 e^{i\omega t}$$

ฟังก์ชันของหลายตัวแปร (multi-variable function)

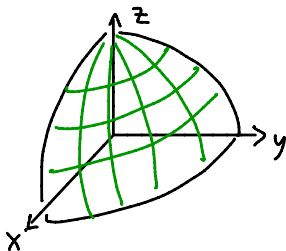
1 ตัวแปร

$$y = y(x)$$



2 ตัวแปร

$$z = z(x, y)$$

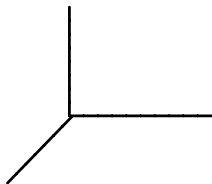


n ตัวแปร

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \text{Hyper-surface} \\ \text{ใน } n+1 \text{ มิติ}$$

Scalar function (field)

อุณหภูมิที่ตำแหน่ง x, y, z (t) ใดๆ
 $T(x, y, z, t)$



Vector function (field)

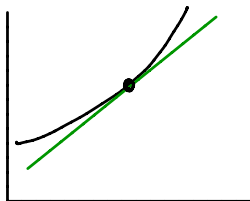
ความเร็วที่ตำแหน่ง x, y, z (t) ใดๆ

$$\vec{v}(x, y, z, t) = v_x(x, y, z, t)\hat{i} + v_y(x, y, z, t)\hat{j} + v_z(x, y, z, t)\hat{k}$$

Vector function = 3 Scalar function

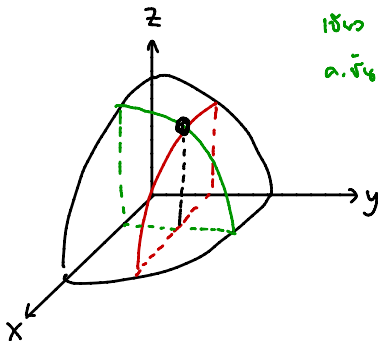
อนุพันธ์ย่อย (partial derivative)

1. อนุพันธ์



$$\begin{aligned}\text{ความชัน} &= \frac{dy}{dx} \\ &= \text{อัตราการเปลี่ยนแปลงของ } y \text{ เทียบ } x\end{aligned}$$

2. อนุพันธ์



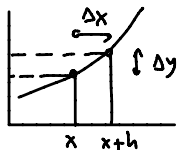
ให้ x คงที่ y เปลี่ยน

$$\text{อนุพันธ์} = \frac{\partial z}{\partial y} \left[\frac{\Delta z}{\Delta y} \text{ โดย } x \text{ คงที่} \right]$$

ให้ y คงที่ x เปลี่ยน

$$\text{อนุพันธ์} = \frac{\partial z}{\partial x} \left[\frac{\Delta z}{\Delta x} \text{ โดย } y \text{ คงที่} \right]$$

$$1 \text{ อนุพันธ์ } \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$



$$2 \text{ อนุพันธ์ } \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x+h, y) - z(x, y)}{h}$$

$z(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(x, y+h) - z(x, y)}{h}$$

$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \text{ อนุพันธ์ของ } z \text{ เทียบกับ } x \text{ โดยที่ } y \text{ คงที่} \right]$

$\left[\frac{\partial z}{\partial y} \text{ อนุพันธ์ของ } z \text{ เทียบกับ } y \text{ โดยที่ } x \text{ คงที่} \right]$

ตัวอย่าง ให้ $z = x^3y - e^{xy}$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot 3x^2 - e^{xy} \cdot y = 3x^2y - ye^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - xe^{xy}$$

ตัวอย่าง ให้ $z = x^3y - e^{xy}$ จงหาอนุพันธ์อันดับสองทั้งหมด

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - x e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y - y e^{xy}) = 6xy - y^2 e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 - x e^{xy}) = 3x^2 - xy e^{xy} - e^{xy}$$

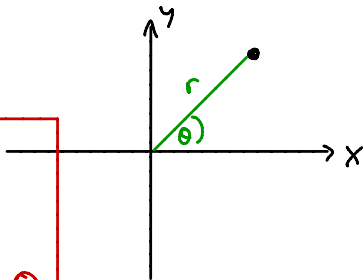
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y - y e^{xy}) = 3x^2 - yx e^{xy} - e^{xy}$$

} ทำกิจ
จงแสดงว่า
 $z(x,y)$
“น่าทึ่ง”

ตัวอย่าง ให้ $z = x^2 - y^2$ ใน Cartesian coordinate จงหา $\frac{\partial z}{\partial r}$ ใน Polar coordinate

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



$$z = x^2 - y^2 = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta$$

$$z = r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \text{--- ①}$$

$$z = x^2 - y^2 = x^2 - (r^2 - x^2)$$

$$z = 2x^2 - r^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -2r \quad \text{--- ②}$$

$$z = x^2 - y^2 = (r^2 - y^2) - y^2$$

$$z = r^2 - 2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 2r \quad \text{--- ③}$$

$\frac{\partial z}{\partial r}$ ค่าปกติในขณใด ?

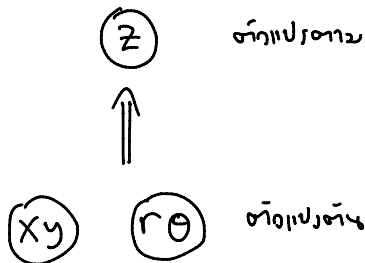
$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$$

↑ θ คง

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta = 2r(\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x = -2r$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y = +2r$$



หาค่า z ในรูป
สองพิกัด 2 ตัวใด ๆ $\Leftarrow$

สองพิกัด 4 ตัว
 (x, y, r, θ)



เหลือ 2 ตัว

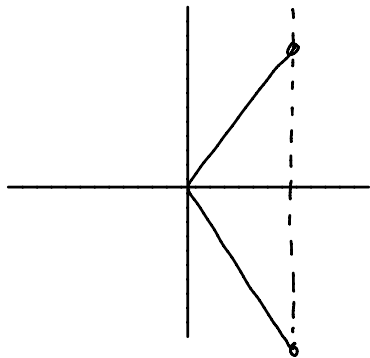
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$



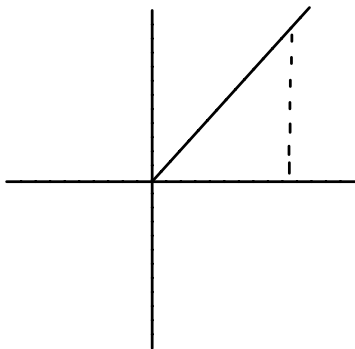
สองพิกัดเหลือ:-

$$\begin{aligned}
 &= \# \text{สองพิกัด} - \# \text{เหลือ} \\
 &= 4 - 2 = 2
 \end{aligned}$$

$$z(r, x)$$



$$z(x, \theta)$$

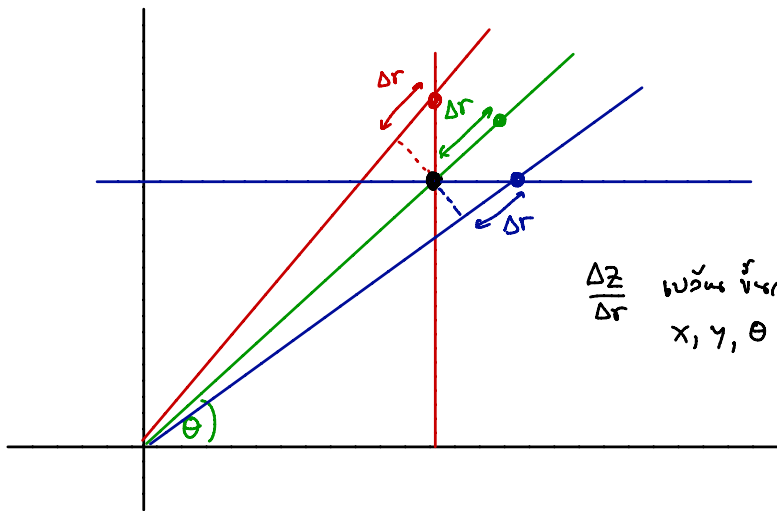


$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$$

,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y$$



$$\frac{\Delta z}{\Delta r} \text{ is the value of } z \text{ at } x, y, \theta \text{ and}$$

Quiz

- 1 จงหาค่าทั้งหมดที่เป็นไปได้ของ $\ln(ei)$
- 2 จงหารากที่หกของ 1 และแสดงว่ารากที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะมี complex conjugate เป็นรากด้วย
- 3 จงเขียน $\sin(\pi - 2i \ln 3)$ ในรูป $x + iy$