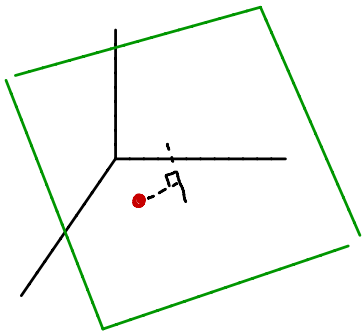


Maxima/Minima with Constraints
Change of variables
Differentiation of Integrals

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 17 September 2020

ตัวอย่าง จงหาระยะสั้นที่สุดจากระนาบ $z = 3 - x - y$ จากจุด $(1, 1, -1)$



$$\begin{aligned}d &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 \\&= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (4-x-y)^2 \\&= ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f\end{aligned}$$

$$\frac{\partial d}{\partial x} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial d}{\partial y} = \dots = 0$$

2 สมการ

หาค่า x, y



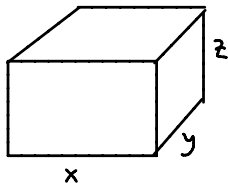
แทน x, y ลงใน

$d(x, y)$

ตัวอย่าง กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีด้านสามด้านยาว x, y, z ตามลำดับ มีปริมาตร V คงที่ จงหา x, y, z ที่ทำให้กล่องมีพื้นที่ผิวรวมน้อยที่สุด

$$A = 2(xy + yz + zx) \quad [\text{หน่วย}^2]$$

$$V = xyz \quad [\text{หน่วย}^3]$$



แก้ :

$$A(x, y, z)$$

$$V(x, y, z) = \text{คงที่}$$

} $A(x, y)$ 2 ตัวแปร

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

} 2 สม 2 ตัวแปร $\Rightarrow$ หาค่า x, y



หา z, A

$$A = xy + yz + zx \quad [\text{utility}]$$

$$V = xyz \quad [\text{cost}]$$

กำหนด z : $z = \frac{V}{xy} \Rightarrow A(x,y) = xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}$

หาจุดต่ำสุด $\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{V}{x^2} = 0 \quad -①$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{V}{y^2} = 0 \quad -②$$

หา x, y $y = \frac{V}{x^2} \Rightarrow x = \frac{V}{(\frac{V}{x^2})^2} = \frac{x^4}{V} \quad [x \neq 0]$

$$x^3 = V$$

$$x = V^{1/3} \Rightarrow y = V^{1/3} \quad [\text{สมมาตรของ } x, y]$$

เขาหัวโล้น :

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{V}\sqrt[3]{V}} = V^{1/3}$$

$$A = 2(xy + yz + zx) = 6V^{2/3}$$

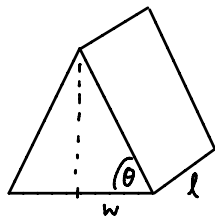
หาค่าต่ำสุดของ A ? $\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} > 0$? $\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} > 0$?

$$\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial y}\right) > \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x \partial y}\right)^2 ?$$

ตัวอย่าง เติ้นท์ผ้าไม่มีพื้น มีหน้าตัดเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีความยาวฐาน $2w$ และมุมที่ฐาน θ และเต็นท์มีความยาว l ต้องการให้ตัวเต็นท์มีปริมาตร V คงที่ จงหาค่า w, l, θ ที่ทำให้ใช้วัสดุน้อยที่สุด

$$\textcircled{1} \quad A = A(w, l, \theta) \quad [\text{ช่องผืน}]$$

$$V(w, l, \theta) = \text{คงที่} \quad [\text{เงื่อนไข}]$$



$$\textcircled{2} \quad \text{กำจัด 1 ตัวแปร ด้วย } V \Rightarrow A(2 \text{ ตัวแปร})$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial A}{\partial \dots} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \dots} = 0 \Rightarrow 2 \text{ สมการ 2 ตัวแปร}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{แก้} \Rightarrow \text{ได้จุดต่ำสุด}$$

$$\textcircled{5} \quad \text{หาค่าตัวแปรตัวสุดท้าย และ ค่า } A_{\min}$$

Constrained vs Unconstrained optimization

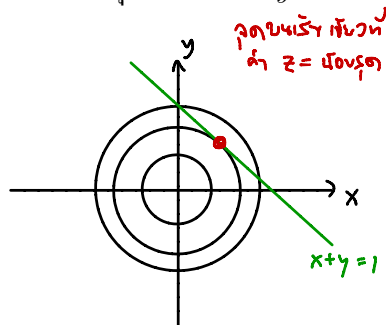
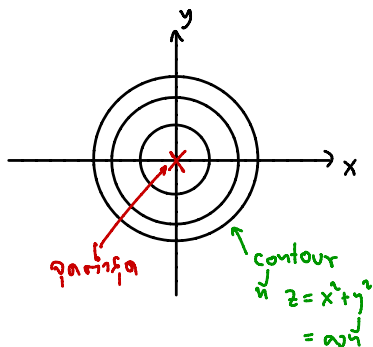
ตัวอย่าง จงหา (x, y) ที่ทำให้ $z = x^2 + y^2$ มีค่าน้อยที่สุด

Unconstrained

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

ตัวอย่าง จงหา (x, y) ที่ทำให้ $z = x^2 + y^2$ มีค่าน้อยที่สุด โดยที่ $x + y = 1$

Constrained



ตัวอย่าง จงหา (x, y) ที่ทำให้ $z = x^2 + y^2$ มีค่าน้อยที่สุด โดยที่ $x + y = 1$

วิธีแรก กำจัดตัวแปร $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$z = x^2 + (1-x)^2 \quad [z(1\text{-ตัวแปร})]$$

$$\frac{dz}{dx} = 0 = 2x + 2(1-x)(-1)$$

$$2x - 2(1-x) = 0$$

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - x = \frac{1}{2}$$

จุดต่ำสุด $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

§ 2 Differential

$$z = x^2 + y^2$$

$$x + y = 1$$

$\Rightarrow$

$$dz = 2x dx + 2y dy$$

$$dx + dy = 0$$

$\Downarrow$

$$dy = -dx$$

$$dz = 2x dx - 2y dx$$

$$= (2x - 2y) dx$$

$\Downarrow$

ຈົດຈຳກັດ : $dz = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0$

$\Rightarrow$ ນັ້ນ ຈົ່ງ ຄຳນວນ ຈົ່ງໄດ້ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

ตัวคูณลากรอง (Lagrange Multiplier)

หาจุดสูงสุดต่ำสุดของ

$$z = z(x, y)$$

$$z = x^2 + y^2$$

ภายใต้ (constraint)

$$\phi(x, y) = 0$$

$$\phi = x + y - 1 = 0$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0 \quad [\text{หาจุดสูงสุดต่ำสุด } dz=0]$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \quad [\phi = 0 \Rightarrow d\phi = 0]$$

Lagrange Multiplier

$$\begin{aligned} dz + \lambda d\phi &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy = 0 \end{aligned}$$

Lagrange Multiplier

$$dz + \lambda d\phi = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy = 0$$

๒๐๓ ๗ ที่ ๑๒๓๔๕

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$\phi(x, y) = 0$$

3 ตัวแปร (x, y, λ)
 $\Rightarrow$ แทน x, y (จุดต่ำสุด/สูงสุด)
 $\left(\begin{array}{l} \lambda \text{ ปลายเปิด} \\ \text{แต่บางครั้งก็ไม่ได้} \end{array} \right)$

ວິທີລາຄາ

$z(x, y)$ ໝາຍເຖິງ (objective function)

$\phi(x, y)$ ເປັນ

ຖ້າວ່າ objective function ກໍ່ຄື $f(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda \phi(x, y)$

ເກາະຖືກຂໍ້ຈຳກັດ f ມີລູກ x, y, λ (unconstrained)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} &= \phi(x, y) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{3 ສາມ ຂໍ້ກົງໄປ} \\ \text{ກັບ } x, y, \lambda \end{array}$$

ตัวอย่าง จงหา (x, y) ที่ทำให้ $z = x^2 + y^2$ มีค่าน้อยที่สุด โดยที่ $x + y = 1$

$$z = x^2 + y^2 \quad \phi = x + y - 1$$

$$\begin{aligned} f(x, y, \lambda) &= z + \lambda \phi \\ &= x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \quad -①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \quad -②$$

$$\phi = x + y - 1 = 0 \quad -③$$

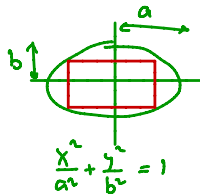
$$① \text{ \& } ② : \quad x = y \quad -④$$

$$\text{แก้ } ③ \text{ \& } ④ : \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$

ที่ x, y

ตัวอย่าง ทรงรีถูกกำหนดด้วยสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

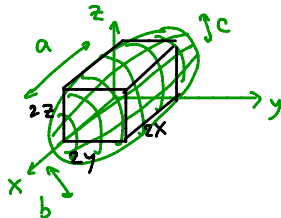
จงหาว่ากล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แนบอยู่ด้านในทรงรีนี้จะต้องมีด้านกว้างยาวสูงเท่าใดจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด



$$V(x, y, z) = 8xyz \quad [x, y, z > 0]$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$f = V + \lambda \phi = 8xyz + \lambda \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right]$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad 8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \quad -①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad 8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \quad -②$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad 8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \quad -③$$

$$\phi \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad -④$$

$$[\text{แก้ ①-④} \Rightarrow \text{หา } (x, y, z, \lambda)]$$

$$8yz + \frac{2\lambda x}{a^2} = 0 \quad -①$$

$$8xz + \frac{2\lambda y}{b^2} = 0 \quad -②$$

$$8xy + \frac{2\lambda z}{c^2} = 0 \quad -③$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad -④$$

$$x① + y② + z③ : \quad 24xyz + 2\lambda \left(\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}_{=1} \right) = 0$$

$$24xyz + 2\lambda = 0 \quad =1$$

$$\lambda = -12xyz \quad -⑤$$

$$8yz + \frac{27x}{a^2} = 0 \quad -①$$

$$8xz + \frac{27y}{b^2} = 0 \quad -②$$

$$8xy + \frac{27z}{c^2} = 0 \quad -③$$

$$\lambda = -12xyz \quad -⑤$$

$$⑤ \rightarrow ① : \quad 8yz - 24 \frac{xyz}{a^2} \cdot x = 0 \quad [y \neq 0, z \neq 0]$$

$$1 - 3 \frac{x^2}{a^2} = 0$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ປັດໄຈນັ້ນ $\frac{4\pi}{3} abc$

ປັດໄຈນັ້ນ $\frac{8}{3\sqrt{3}} abc$

$$[\text{အັດຕະໂນມັດ} \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}]$$

$$\text{ປັດໄຈ} \quad V = 8 \cdot \frac{abc}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} abc \Rightarrow \approx 37\% \text{ ນອກ ກໍລະນີ}$$

Lagrange Multiplier ที่มีหลาย constraints

$$W = W(x, y, z) \quad \text{ฟังก์ชัน/ฟังก์ชัน (objective function)}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= 0 \\ \phi_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{constraint}$$

$\phi_1 = 0$ ผังผิวที่ 3 อีก
 $\phi_2 = 0$ ผังผิวที่ 2 อีก

$$f(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = W + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2$$

ϕ_1 & ϕ_2 ผังผิว 2 อีกทีอีก
 $\Rightarrow$ ผังผิวที่ 3 อีก

$\Downarrow$
Unconstrained optimization
5 ตัวแปร $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0$$

$$\dots y \dots$$

$$\dots z \dots$$

$$\phi_1(x, y, z) = 0$$

$$\phi_2(x, y, z) = 0$$