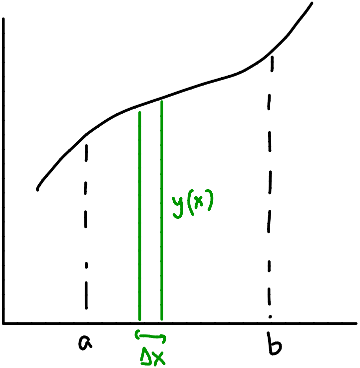
Multiple Integrals

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 21 October 2020

พื้นที่ใต้กราฟ



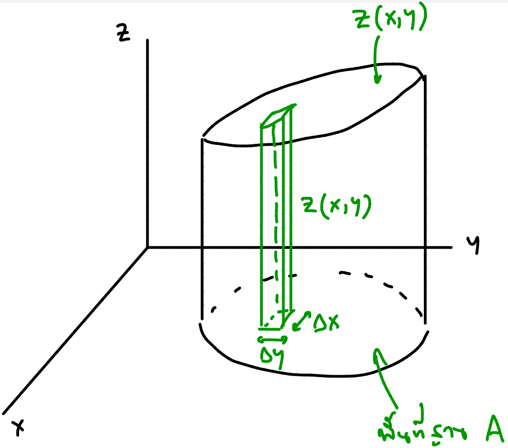
$$\text{พท.} = \int y(x)\,dx$$

$$\text{พท.} \approx \sum (\text{กว้าง} \times \text{ยาว})$$

$$= \sum y(x)\,\Delta x$$

$$= \int_a^b y\,dx$$

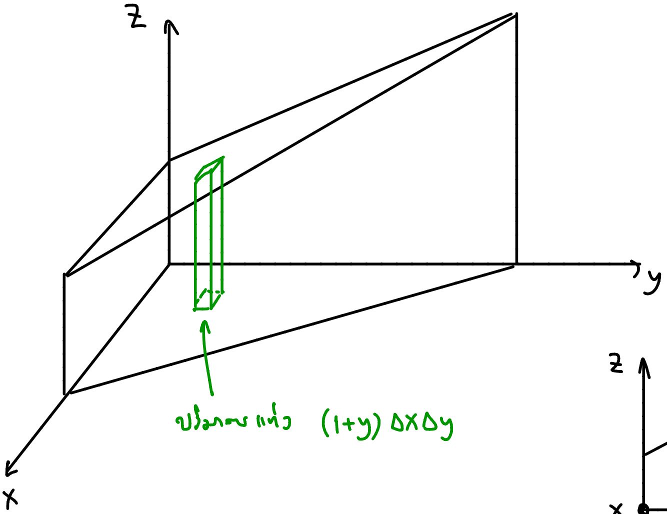
ปริมาตรใต้กราฟ

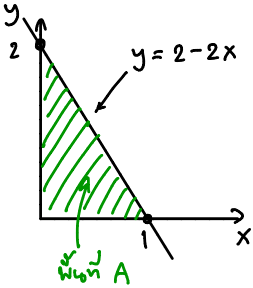


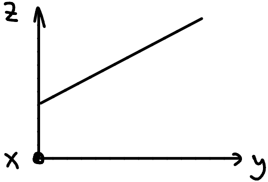
$$\text{ปริมาตร} = \sum z\,\Delta x\,\Delta y$$

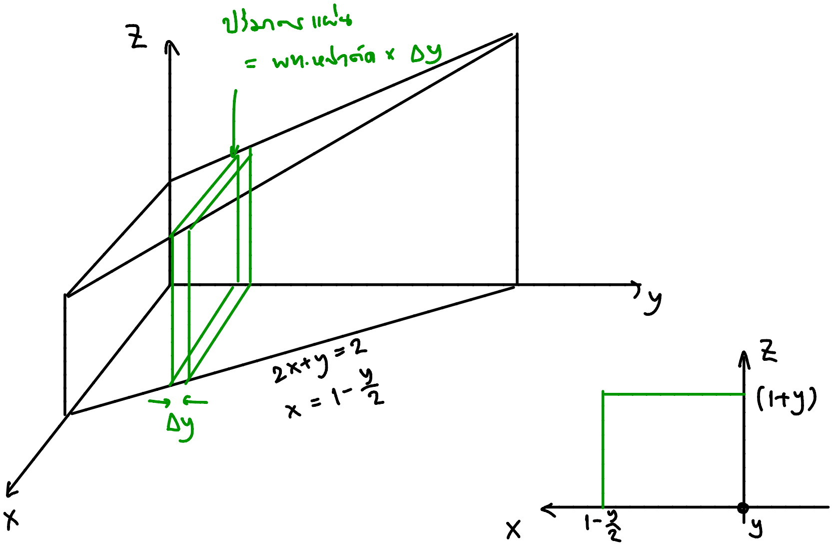
$$= \iint_A z\,dx\,dy$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $\iint_A (1+y)\,dxdy$ โดยที่ A คือพื้นที่ระหว่างแกน x แกน y และเส้นตรง $2x+y=2$








ปริมาตรแผ่น
= พท.หน้าตัด × Δy
z
y
x
2x+y=2
x = 1 - y/2
Δy
z
(1+y)
x
1 - y/2
y

$$\text{พท. หน้าตัด} = (1+y)\left(1-\frac{y}{2}\right)$$

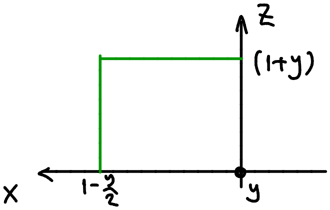
$$\text{พท. หน้าตัด} = \int_{x=0}^{x=1-\frac{y}{2}} z \, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1-\frac{y}{2}} (1+y) \, dx$$

(y คงที่)

$$= (1+y)\, x \Big|_{x=0}^{1-\frac{y}{2}}$$

$$= (1+y)\left(1-\frac{y}{2}\right)$$



ปริมาตรแผ่น $= $ พท.หน้าตัด $\times \Delta y$

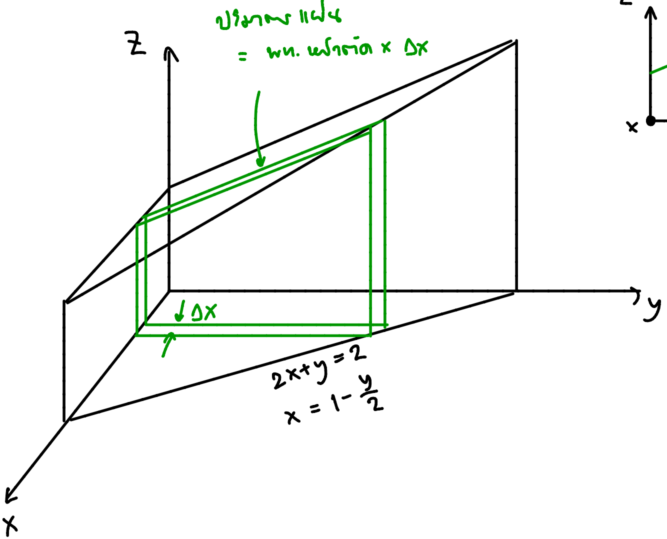
$$= (1+y)\left(1-\frac{y}{2}\right)\Delta y$$

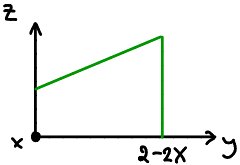
ปริมาตรรวม $= \sum$ ปริมาตรแผ่น

$$= \int_{y=0}^{2} (1+y)\left(1-\frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \int_{0}^{2} \left(1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$= \left(y+\frac{y^2}{4}-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = 2+1-\frac{8}{6} = \frac{5}{3}$$


ปริมาตรแผ่น
= พท. หน้าตัด × Δx
z
y
x
Δx
2x+y=2
x = 1 − y/2

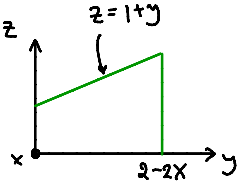

z
y
x
2−2x

$$\text{พท. หน้าตัด} = \int_{y=0}^{y=2-2x} (1+y)\,dy$$

$$= \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^{2-2x}$$

$$= (2-2x) - \frac{1}{2}(2-2x)^2$$

$$= 2x^2 - 6x + 4$$



ปริมาตรรวม $= \sum$ ปริมาตรแผ่น

$$= \int_{x=0}^{1} (2x^2 - 6x + 4)\, dx$$

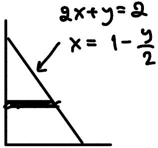
$$= \left(\frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 4x \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - 3 + 4 = \frac{5}{3}$$

เรียงลำดับ

$$V = \iint_A (1+y)\,dx\,dy$$

x ก่อน



$$V = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1-\frac{y}{2}} (1+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} \Big[(1+y)x\Big]\Big|_{x=0}^{1-\frac{y}{2}}\,dy$$

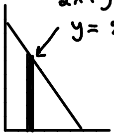
$$= \int_{y=0}^{2} (1+y)\left(1-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$= \ldots = \frac{5}{3}$$

เปลี่ยนลำดับ

$$V = \iint_A (1+y)\,dx\,dy$$

y ก่อน



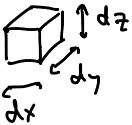
$$V = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2-2x} (1+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[2-2x + \frac{1}{2}(2-2x)^2 \right] dx$$

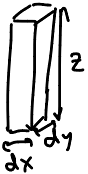
$$= \ldots = \frac{5}{3}$$

ปริมาตรเล็กๆ



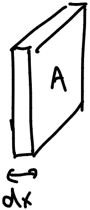
$$\Rightarrow \quad d^3V = dx\,dy\,dz$$

ปริมาตรแท่ง

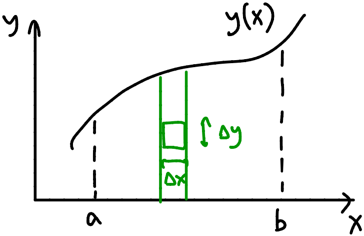


$$\Rightarrow \quad d^2V = z\,dx\,dy$$

ปริมาตรแผ่น



$$\Rightarrow \quad dV = A\,dx$$



$$\text{พื้นที่} = \iint dx\,dy$$

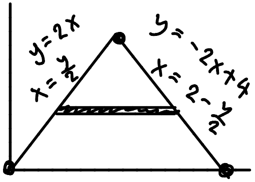
$$= \int_{x=a}^{b} \int_{y=0}^{y(x)} dy \; dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} y \Big|_{y=0}^{y(x)} dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} y(x)\, dx$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $(0,0),(2,0),(1,2)$

$$A = \iint_A dx\,dy$$



x ก่อน

$$A = \int_{y=0}^{2}\int_{x=\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}} dx\,dy$$

$$= \int_{y=0}^{2} x\Big|_{\frac{y}{2}}^{2-\frac{y}{2}} dy$$

$$= \int_{y=0}^{2}\left[2-\frac{y}{2}-\frac{y}{2}\right] dy$$

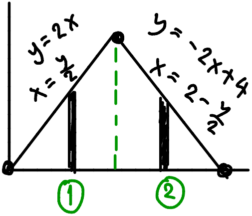
$$= \left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 4-2 = 2$$

y ก่อน

$$A_1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{2x} dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} 2x\, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

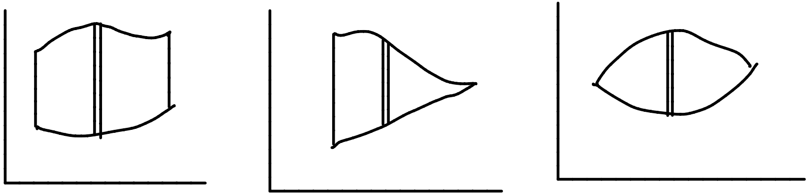


$$A_2 = \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{-2x+4} dy\, dx$$

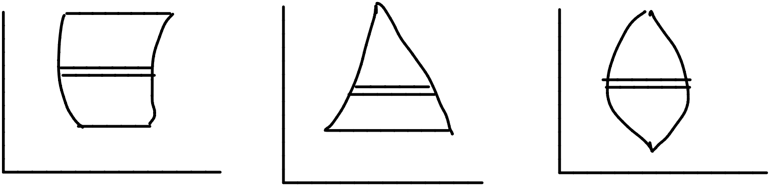
$$= \int_{x=1}^{2} (-2x+4)\, dx$$

$$= (-x^2+4x)\Big|_1^2 = (-4+8)-(-1+4) = 1$$

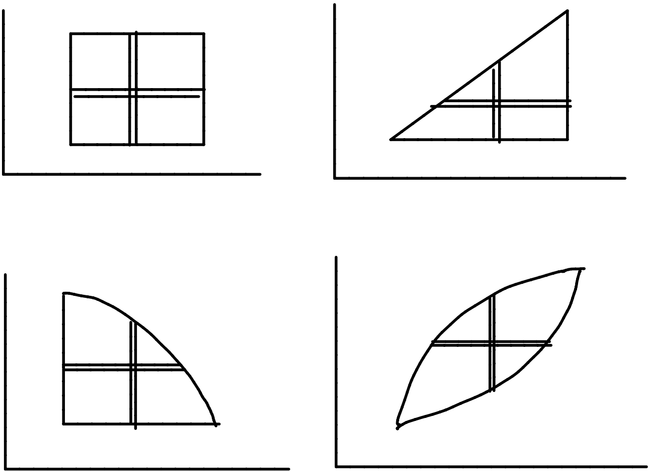
ข้อสังเกตเรื่องลิมิตของการอินทิเกรต



อินทิเกรต y ก่อน สะดวกกว่า



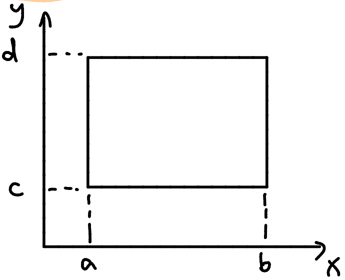
x ต้อง ร่วมก



x หรือ y ก่อนก็ได้

<u>ตัวอย่าง</u> กรณีพิเศษ จงหา $\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} f(x)g(y)\, dy\, dx$

$$= \int_{x=a}^{b} f(x) G(y) \Big|_{y=c}^{d} \, dx$$



$\frac{dG}{dy} = g(y)$

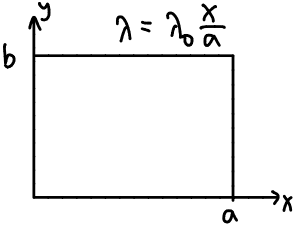
$G(y) \Big|_{c}^{d} =$ ตัวเลข

$$= G(y) \Big|_{c}^{d} \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$$

$$= \left[\int_{y=c}^{d} g(y)\, dy \right] \left[\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx \right]$$

<u>ตัวอย่าง</u> แผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมบนระนาบ $x - y$ อยู่ในช่วง $x = 0 - a$ และ $y = 0 - b$ โดยมีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\lambda(x, y) = \lambda_0 \frac{x}{a}$ จงหา

- มวลรวม
- ตำแหน่ง center of mass
- โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x, y, z



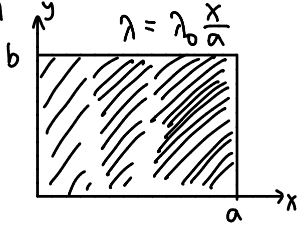
$$M = \iint d^2M = \iint \lambda(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \lambda_0 \frac{x}{a}\, dx\, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \int_{x=0}^{a} x\, dx \int_{y=0}^{b} dy = \frac{\lambda_0}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot b = \frac{1}{2} \lambda_0 ab$$

$$M x_{cm} = \iint x \, d^2M \qquad M y_{cm} = \iint y \, d^2M$$

$$\lambda = \lambda_0 \frac{x}{a}$$



$$M x_{cm} = \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} x \, \lambda_0 \frac{x}{a} \, dx \, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \int_{x=0}^{a} x^2 dx \int_{y=0}^{b} dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \cdot \frac{a^3}{3} \cdot b$$

$$= \frac{1}{3} \lambda_0 a^2 b$$

$$x_{cm} = \frac{\frac{1}{3}\lambda_0 a^2 b}{\frac{1}{2}\lambda_0 a b} = \frac{2}{3} a$$

$$M y_{cm} = \int_0^b \int_0^a y \, \frac{\lambda_0}{a} x \, dx \, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \int x \, dx \int y \, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2}$$

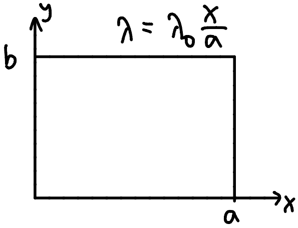
$$= \frac{1}{4} \lambda_0 a b^2$$

$$y_{cm} = \frac{1}{2} b$$

$$I_z = \iint (x^2+y^2)\, d^2M$$

$$= \iint x^2\, d^2M + \iint y^2\, d^2M$$

$$= I_y + I_x$$



$$I_x = \int_0^b \int_0^a y^2 \left(\lambda_0 \frac{x}{a}\right) dx\, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \int_0^a x\, dx \int_0^b y^2\, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^3}{3}$$

$$= \frac{1}{6} \lambda_0 a b^3 = \frac{1}{3} M b^2$$

$$I_y = \int_0^b \int_0^a x^2 \left(\lambda_0 \frac{x}{a}\right) dx\, dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \int x^3\, dx \int dy$$

$$= \frac{\lambda_0}{a} \frac{a^4}{4} b$$

$$= \frac{1}{4} \lambda_0 a^3 b = \frac{1}{2} M a^2$$

Quiz

จงหา $\int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx$