

Multiple Integrals

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 29 October 2020

ตัวอย่าง แผ่นบางอยู่บนระนาบ xy ระหว่างเส้น $y = \sqrt{x}$ และ $y = x^2$

มีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ $\lambda = \alpha xy$ จงหา

1 มวลรวม

$$\iint \lambda \, dx \, dy$$

2 ตำแหน่งของจุด CM

$$\iint x \lambda \, dx \, dy$$

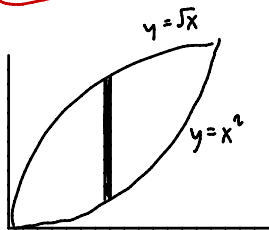
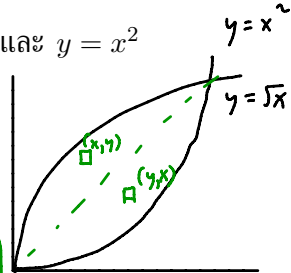
$$\iint y \lambda \, dx \, dy$$

3 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x, y, z

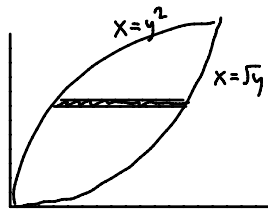
$$\iint x^2 \lambda \, dx \, dy$$

$$\iint y^2 \lambda \, dx \, dy$$

$$\iint (x^2 + y^2) \lambda \, dx \, dy$$

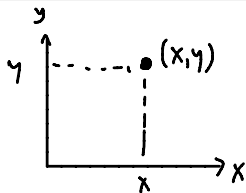


$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} \dots \, dy \, dx$$



$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} \dots \, dx \, dy$$

Polar Coordinate



Cartesian



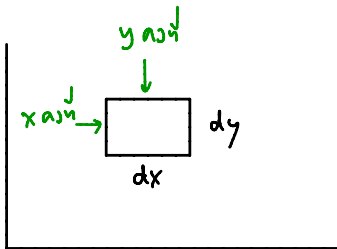
Polar

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

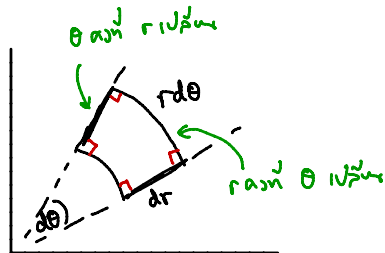
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



Cartesian

$$dA = dx dy$$

↑
အရှိ L^2

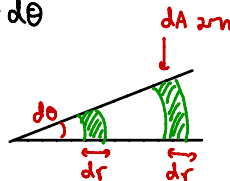


Polar

$$dA = (r d\theta) dr$$

$$= r dr d\theta$$

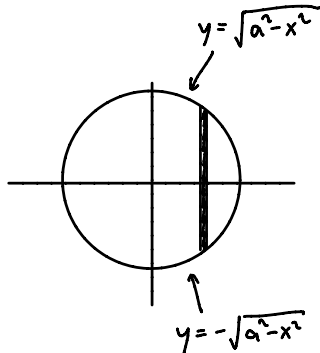
↑
အရှိ L^2



ตัวอย่าง จงหาพื้นที่วงกลมด้วย cartesian coordinate

$$A = \int_{x=-a}^a \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$$

$$= \int_{x=-a}^a 2\sqrt{a^2-x^2} dx$$



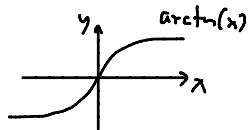
$$= \left[\cancel{x\sqrt{a^2-x^2}} + a^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) \right] \Big|_{x=-a}^a$$

$$= a^2 \left[\arctan\left(\frac{a}{0}\right) - \arctan\left(\frac{-a}{0}\right) \right]$$

$$= a^2 \left[\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) \right]$$

$$= \pi a^2$$

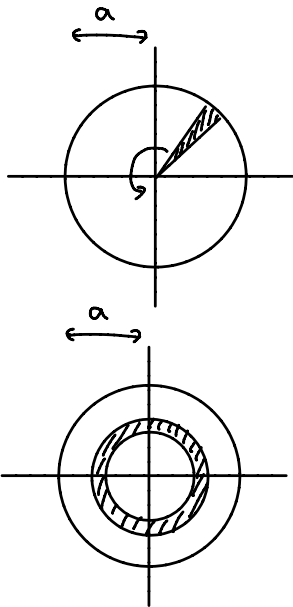
$\uparrow +\frac{\pi}{2}$
 $\uparrow -\frac{\pi}{2}$



ตัวอย่าง จงหาพื้นที่วงกลมด้วย polar coordinate

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^a r \, dr \\
 &= 2\pi \frac{a^2}{2} = \pi a^2
 \end{aligned}$$

$$A = \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} r \, d\theta \, dr$$



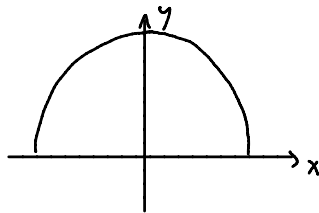
ตัวอย่าง แผ่นบางรูปครึ่งวงกลมมีด้านเรียบอยู่บนแกน x มีความหนาแน่นคงที่
จงหา

❶ มวลรวม

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a \dots r dr d\theta$$

❷ ตำแหน่ง CM

❸ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x, y



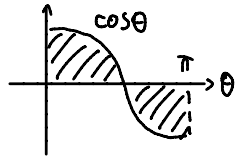
$$M = \iint \lambda r dr d\theta = \frac{\lambda}{2} \pi a^2$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \iint y \lambda r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^a \lambda r \sin\theta \cdot r dr d\theta$$

$$= \frac{1}{M} \lambda \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^a r^2 dr = \frac{1}{M} \lambda \underbrace{[-\cos\theta]_0^{\pi}}_2 \cdot \frac{a^3}{3}$$

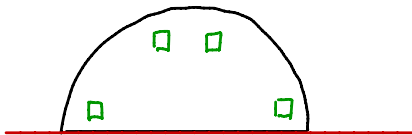
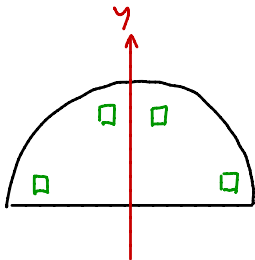
$$= \frac{2\lambda \frac{a^3}{3}}{\frac{\lambda}{2} \pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\begin{aligned}
 X_{cm} &= \frac{1}{M} \iint x \lambda r dr d\theta = \frac{1}{M} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_0^a r \cos \theta \lambda r dr d\theta \\
 &= \frac{\lambda}{M} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta d\theta}_{=0} \int_0^a r^2 dr
 \end{aligned}$$



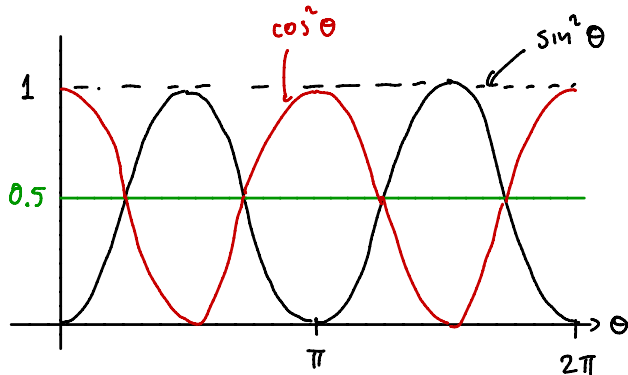
$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint y^2 dM = \int_0^{\pi} \int_0^a (r \sin \theta)^2 \lambda r dr d\theta \\
 &= \lambda \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2 \theta d\theta}_{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{\frac{a^4}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{8} \lambda a^4 \\
 &= \frac{\pi}{8} \left(\frac{2M}{\pi a^2} \right) a^4 = \frac{1}{4} M a^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint x^2 dM = \int_0^\pi \int_0^a (r \cos \theta)^2 \lambda r dr d\theta \\
 &= \lambda \underbrace{\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta}_{= \frac{\pi}{2}} \int_0^a r^3 dr
 \end{aligned}$$



$$I_y = \left| \text{quarter circle} \right| + \left| \text{quarter circle} \right|$$

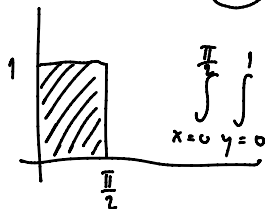
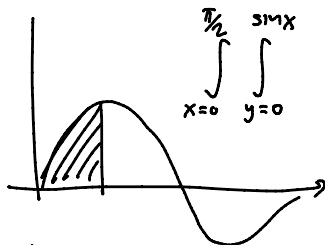
$$I_x = \left| \text{quarter circle} \right| + \left| \text{quarter circle} \right|$$



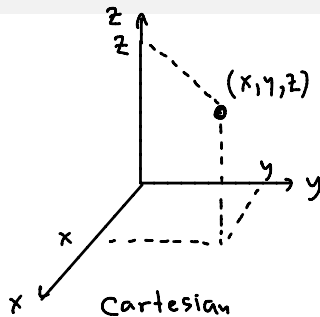
$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

ค่าสูงสุดของ $\sin^2 \theta$, $\cos^2 \theta$ คือ $\frac{1}{2}$

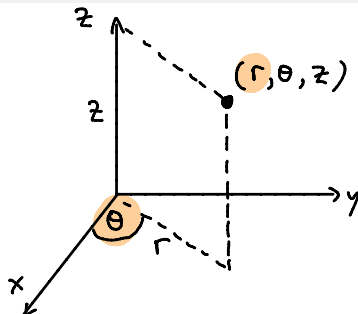


Cylindrical Polar Coordinate

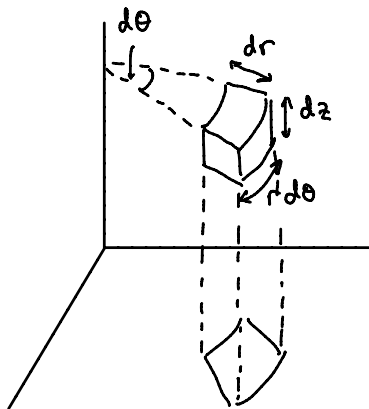
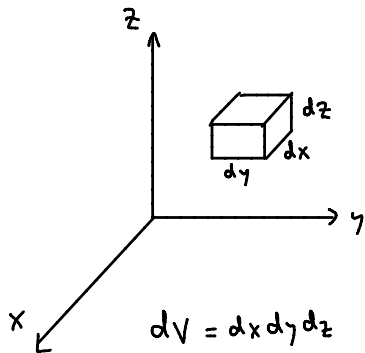


$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

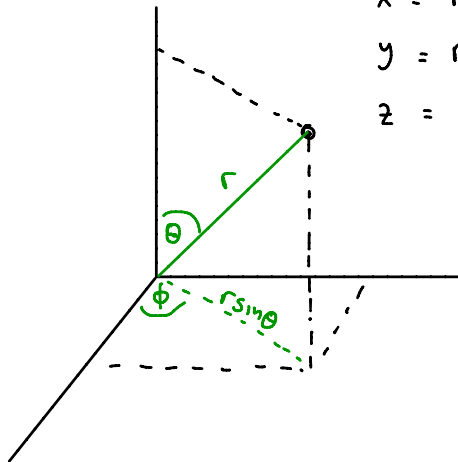
$$z = z$$



$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



Spherical Polar Coordinate



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

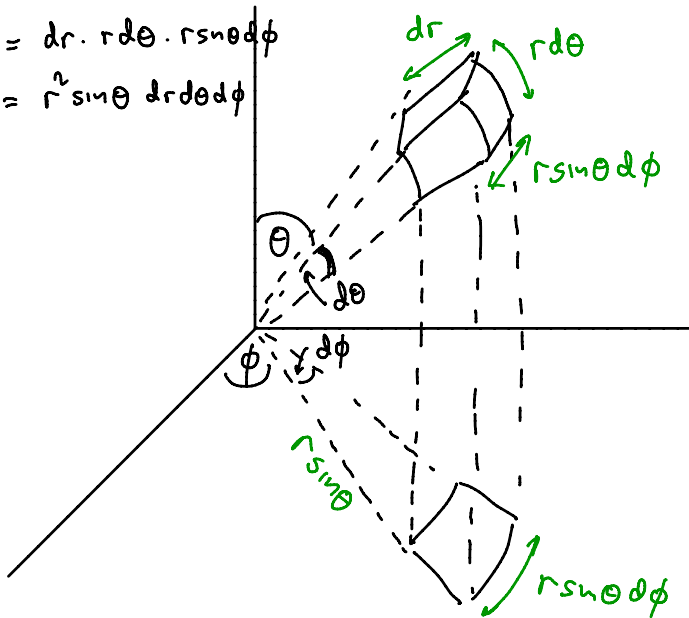
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\phi$$

$$= r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรทรงกลมด้วย spherical polar coordinate

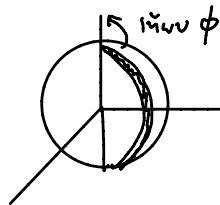
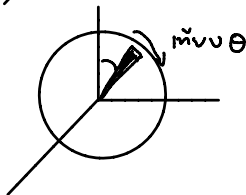
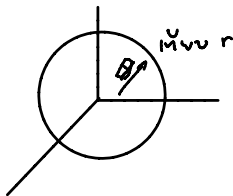
$$V = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^a r^2 \, dr$$

$\uparrow$ 2π $\uparrow$ 2 $\uparrow$ $\frac{a^3}{3}$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad \times$$

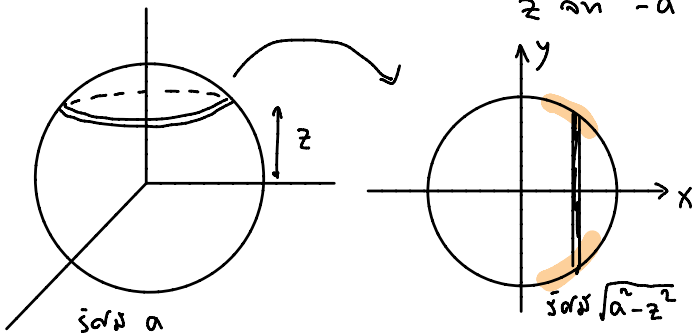


in cartesian

$$y \approx -\sqrt{a^2 - z^2 - x^2} \rightarrow \sqrt{a^2 - z^2 - x^2}$$

$$x \approx -\sqrt{a^2 - z^2} \rightarrow \sqrt{a^2 - z^2}$$

$$z \approx -a \rightarrow a$$



$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - z^2$$

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} \int_{-\sqrt{a^2 - z^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2 - x^2}} dy dx dz = \frac{4}{3} \pi a^3$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรกรวยที่มีรัศมีฐาน R และความสูง h

ส่วน r จาก $0 \rightarrow \frac{R}{h} z$

θ จาก $0 \rightarrow 2\pi$

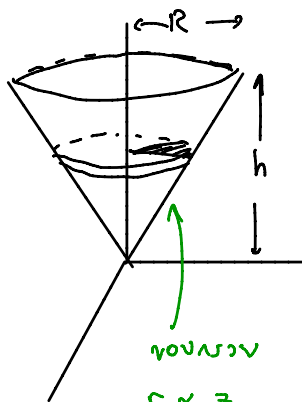
z จาก $0 \rightarrow h$

$$V = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{R}{h} z} r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h \frac{1}{2} \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz$$

$$= \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \int_0^h z^2 dz$$

$$= \pi \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



พ้องพ้อง

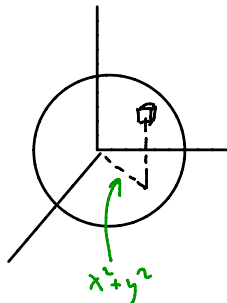
$$r \propto z$$

$$r = \frac{R}{h} z$$

ตัวอย่าง จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกลมที่มีความหนาแน่นคงที่ผ่านแกนกลาง

$$I = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2 \sin^2 \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr$$



Quiz

แผ่นบางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่ในช่วง $x = 0 - L$ และ $y = 0 - L$
และมีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ที่เป็น $\lambda = \lambda_0 \frac{xy}{L^2}$ จงหา

- 1 มวลรวม
- 2 ตำแหน่งของศูนย์กลางมวล
- 3 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x และ y

และอธิบายว่าทำไม $x_{cm} = y_{cm}$ และ $I_x = I_y$

