

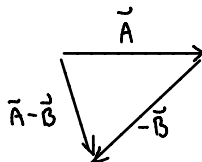
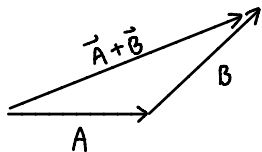
Vector & Vector Derivative

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 5 November 2020

บวกลบเวกเตอร์

เรขาคณิต



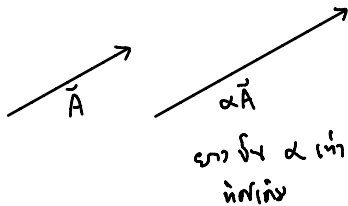
component

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = \dots$$

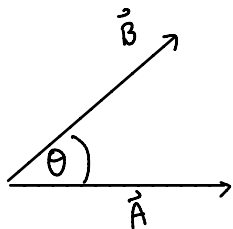
$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \hat{i} + (\dots) \hat{j} + (\dots) \hat{k}$$

คูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์



$$\alpha \vec{A} = (\alpha A_x) \hat{i} + (\alpha A_y) \hat{j} + (\alpha A_z) \hat{k}$$

Dot Product

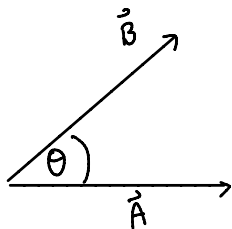


$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

↑
scalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Cross Product



$$\vec{A} \times \vec{B}$$

- ขนาดของ $(\vec{A} \times \vec{B})$ คือ $AB \sin \theta$
- ทิศทาง $\perp$ กับ $\vec{A}$ & $\vec{B}$
กฎมือขวา

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} \\ + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$$

Diagram illustrating the dot product $\vec{A} \cdot \vec{B}$ using unit vectors $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

The vectors are represented as:

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

The dot product is calculated as:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

The resulting matrix shows the dot products of the components:

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

The diagonal elements (1, 1, 1) are highlighted in orange, representing the dot products of the unit vectors with themselves.

Diagram illustrating the cross product $\vec{A} \times \vec{B}$ using unit vectors $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

The vectors are represented as:

$$\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

The cross product is calculated as:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

The resulting matrix shows the cross products of the components:

	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

The diagonal elements (0, 0, 0) are highlighted in orange, representing the cross products of the unit vectors with themselves.

A diagram above the matrix shows the right-hand rule for the cross product, indicating the direction of the resulting vector.

Scalar Triple Product

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x (B \times C)_x + A_y (B \times C)_y + A_z (B \times C)_z$$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \Rightarrow (B \times C)_x = \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix}$$

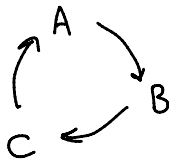
$$(B \times C)_y = - \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix}$$

$$(B \times C)_z = \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

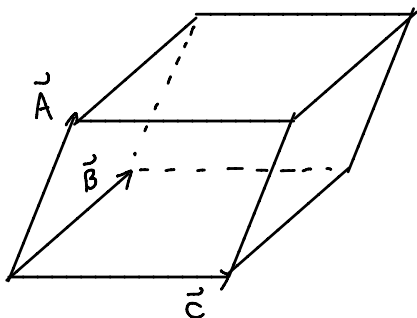
$$\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = -\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

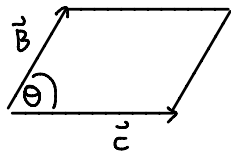
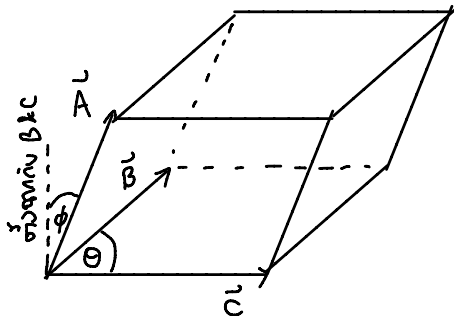


๑๓๖๗๘๙๐ +
 ๑๓๖๗๘๙๐ -

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \text{volume of parallelepiped}$

[ឧបមា ឬ ប្រមាណ ប្រវាណ]





$$\begin{aligned} \text{wn. } \xi_{14} &= \underbrace{|\vec{C}|}_{\xi_{14}} \underbrace{|\vec{B}| \sin \theta}_{\xi_3} \\ &= |\vec{B} \times \vec{C}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{volume} &= \text{wn. } \xi_{14} \times \xi_3 \\ &= |\vec{B} \times \vec{C}| |\vec{A}| \cos \phi \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

Vector Triple Product

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

- $\vec{B} \times \vec{C}$ တွင် $\vec{B}$ နှင့် $\vec{C}$ တို့သည် BC ပေါ်တွင် ရှိသည်
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ တွင် $\vec{B} \times \vec{C}$ သည် BC ပေါ်တွင် ရှိသည် $\Rightarrow$ $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ သည် BC ပေါ်တွင် ရှိသည်
- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ သည် $\vec{B}$ နှင့် $\vec{C}$ ၏ linear combination ဖြစ်သည်

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = k_1 \vec{B} + k_2 \vec{C}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

สมบัติ

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

1 BAC - CAB

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \\ &= \underbrace{\vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C})}_{\text{BAC}} - \underbrace{\vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})}_{\text{CAB}} \end{aligned}$$

2 - linear combination ของ 2 เวกเตอร์คือ

- เวกเตอร์ทั้งสอง dot product ของสอง เวกเตอร์

- การคูณของเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

$$\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{C}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B}$$

เส้นตรงใน 3 มิติในรูปเวกเตอร์

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{A}$$

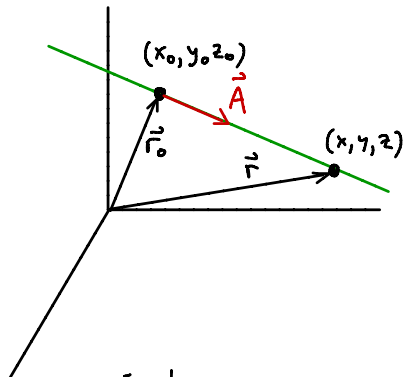
สมการเส้นตรงในรูปเวกเตอร์

$$x = x_0 + \lambda A_x$$

$$\lambda = \frac{x - x_0}{A_x}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{A_x} = \frac{y - y_0}{A_y} = \frac{z - z_0}{A_z}$$

สมการเส้นตรง



อีกอย่าง

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

ระนาบใน 3 มิติในรูปเวกเตอร์

ที่ เวกเตอร์ ตั้งฉากกับระนาบ

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = d|\vec{n}|$$

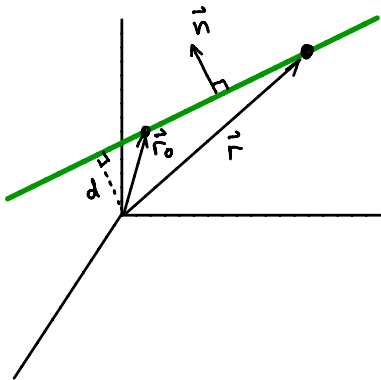


$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \text{ค่าคงที่}$$

สมการระนาบในรูปเวกเตอร์

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad , \quad \vec{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j} + n_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow ax + by + cz = d$$



อนุพันธ์ของเวกเตอร์

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

↑ ↑ ↑
เวก. พังก์ชันของ t

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{dA_x}{dt} \hat{i} + \frac{dA_y}{dt} \hat{j} + \frac{dA_z}{dt} \hat{k}\end{aligned}$$

$$a = a(t)$$

scalar

$$\vec{A} = \vec{A}(t) , \quad \vec{B} = \vec{B}(t)$$

vector

$$\frac{d}{dt}(a\vec{A}) = a \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A} \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}$$

ตัวอย่าง การเคลื่อนที่วงกลม

$$|\vec{r}| = \text{คงที่} \quad |\vec{v}| = \text{คงที่} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

$$|\vec{r}| = \text{คงที่} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r} = \text{คงที่}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$$

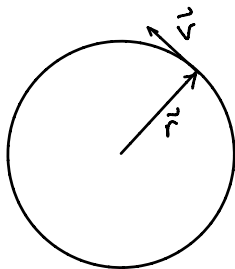
$$2 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$|\vec{v}| = \text{คงที่} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{คงที่}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{r}$$



$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$$

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} + v^2 = 0$$

$$r a \cos \theta_{ra} + v^2 = 0$$

$$a = - \frac{v^2}{r \cos \theta_{ra}} \quad \left[\theta_{ra} = 180^\circ = \pi \right]$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ตัวอย่าง การเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

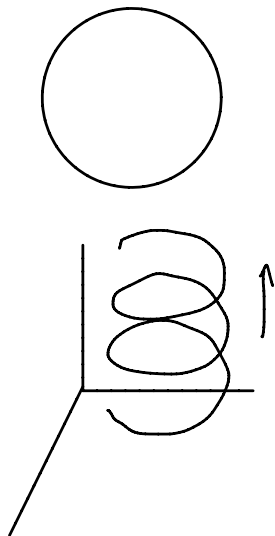
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= 2 \vec{v} \cdot \left[\frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B} \right]$$

$$\frac{d}{dt}(v^2) = 0$$

$\Rightarrow$ พลังงานจลน์ v คงที่



เวกเตอร์ใน polar coordinate

$\hat{r}, \hat{\theta}$ 7 หน่วย

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

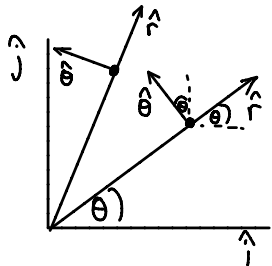
$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{i} \frac{d}{dt}(\cos \theta) + \hat{j} \frac{d}{dt}(\sin \theta)$$

$$= -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j}$$

$$= \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r}$$



ตัวอย่าง กลศาสตร์ใน polar coordinate

$$\vec{r} = r \hat{r}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{r} \frac{dr}{dt} \\ &= r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{r} \hat{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ &= (\underbrace{\ddot{r}}_{\text{เวกเตอร์ } r} - r \underbrace{\dot{\theta}^2}_{\text{อัตราเร็วเชิงมุม}}) \hat{r} + (r \underbrace{\ddot{\theta}}_{\alpha} + 2 \underbrace{\dot{r} \dot{\theta}}_{\text{coriolis}}) \hat{\theta}\end{aligned}$$

Quiz

แผ่นบางรูปวงกลมวางบนระนาบ xy โดยมีความหนาแน่นเชิงพื้นที่ที่ตำแหน่ง (x, y) ใดๆ กำหนดโดย $\lambda = \alpha(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ จงหา

- 1 มวลรวมของแผ่นนี้
- 2 โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน z