

# Gradient and Vector Derivatives

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 12 November 2020

## Scalar Field & Vector Field

Scalar Field  $\Rightarrow \phi(x, y, z)$

↑  
1 จุด 3 แกน 1 ค่า

สนามสเกลาร์  $T(x, y, z)$

---

Vector Field  $\Rightarrow \vec{v}(x, y, z)$

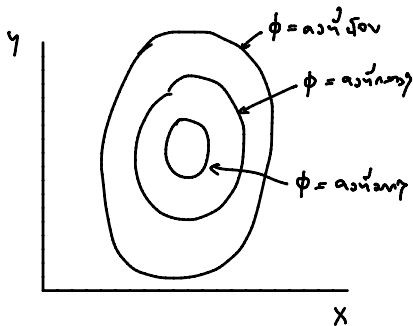
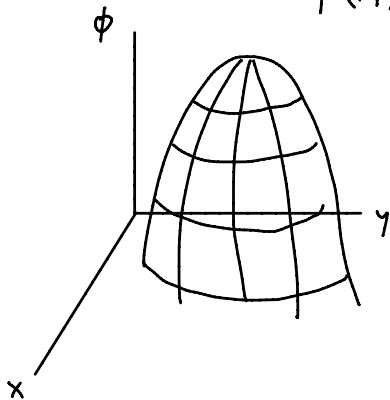
↑  
1 จุด 3 แกน 3 ค่า  
(= 3 scalar field)

สนามเวกเตอร์  $\vec{v}(x, y, z)$

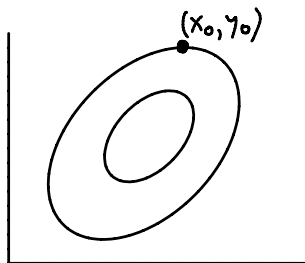
แสดงเป็น  
 $\vec{v}$

Scalar field ใน 2 มิติ

$$\phi(x, y)$$



## Directional Derivative & Gradient



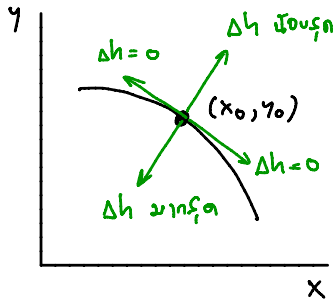
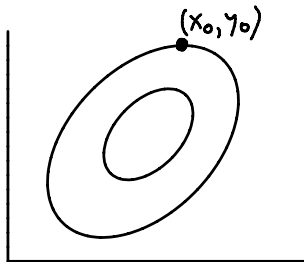
ฟังก์ชันนี้ ที่  $(x_0, y_0)$   
มีค่าจะเพิ่มไหม?



ทิศทางไหน?

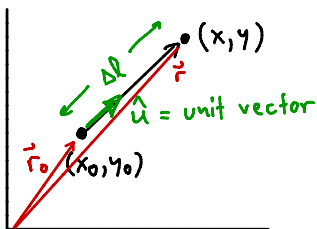


directional derivative



$$\text{အဘက်သို့} = \frac{\Delta(\text{အဘက်သို့})}{\Delta(\text{အကွာအဝေး})} = \frac{\Delta h}{\Delta l}$$

အဘက်သို့ ချော့နု



$$\hat{u} = a\hat{i} + b\hat{j} \quad , \quad \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta l \hat{u}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta l \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$x = x_0 + a\Delta l = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + b\Delta l = y_0 + \Delta y$$

$$\Delta x = a\Delta l \quad , \quad \Delta y = b\Delta l$$

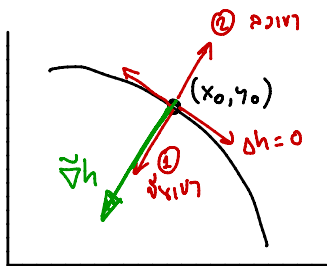
$$\begin{aligned}
\Delta h &= h(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - h(x_0, y_0) \\
&= \left[ h(x_0, y_0) + \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y + \dots \right] - h(x_0, y_0) \\
&\approx \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h}{\partial y} \Delta y \\
&\approx \frac{\partial h}{\partial x} a \Delta l + \frac{\partial h}{\partial y} b \Delta l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{directional derivative} &= \frac{\Delta h}{\Delta l} = \frac{\partial h}{\partial x} a + \frac{\partial h}{\partial y} b \\
&= \left( \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \underbrace{(a\hat{i} + b\hat{j})}_{\hat{u}}
\end{aligned}$$

$\nabla = \text{gradient}$

$$\text{directional derivative} = \vec{\nabla} h \cdot \hat{u}$$

$\downarrow \vec{\nabla} h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} \quad [\text{Gradient}]$



$$\begin{aligned} \text{การเพิ่มขึ้น} &= \frac{dh}{dl} = \vec{\nabla}h \cdot \hat{n} \\ &= |\vec{\nabla}h| |\hat{n}| \cos \theta \\ &= |\vec{\nabla}h| \cos \theta \end{aligned}$$

$$\theta = 0 \rightarrow \text{เพิ่ม}$$

$$\frac{dh}{dl} = |\vec{\nabla}h| \quad (\text{ค่าบวก, ขนานกับทิศทางเพิ่ม})$$

$$\theta = 180^\circ \rightarrow \text{ลบ}$$

$$\frac{dh}{dl} = -|\vec{\nabla}h| \quad (\text{ค่าลบ, ขนานกับทิศทางลด})$$

$$\theta = 90^\circ, 270^\circ \rightarrow \text{ตั้งฉากกับ contour}$$

$$\frac{dh}{dl} = 0$$

$$\vec{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j}$$

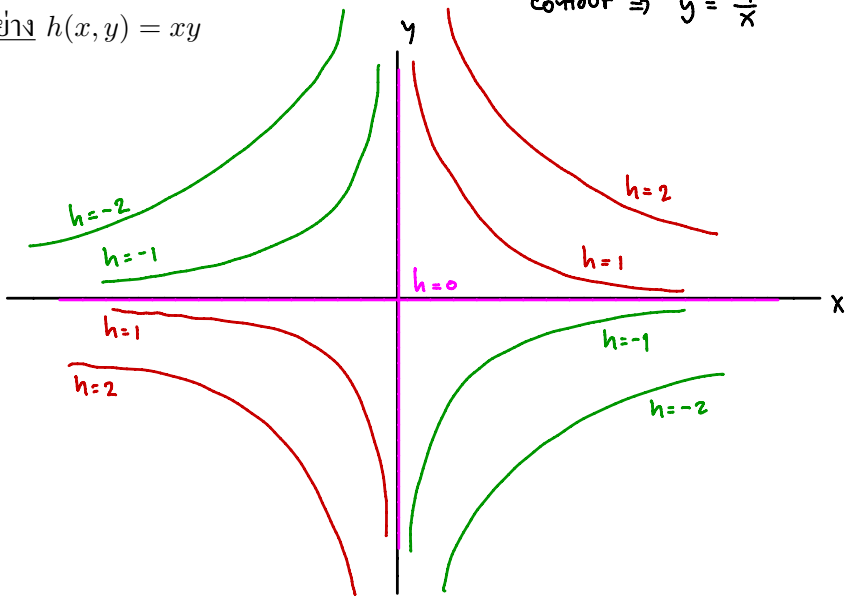
ขนาดของ  $\vec{\nabla}h$  =  
การเพิ่มขึ้นสูงสุดที่ตำแหน่งนั้น

ทิศของ  $\vec{\nabla}h$  =  
ชี้ไปทางที่การเพิ่มขึ้นสูงสุด



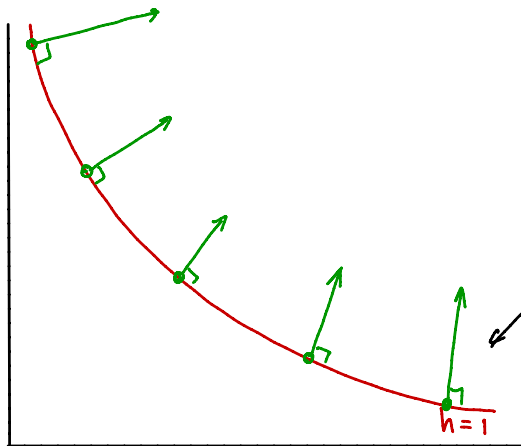
ตัวอย่าง  $h(x, y) = xy$

contour  $\Rightarrow y = \frac{h}{x}$



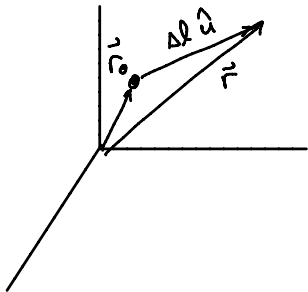
$$h = xy$$

$$\vec{\nabla} h = \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} = y \hat{i} + x \hat{j}$$



$|\vec{\nabla} h|$  ឆ្លង  
 contour ក្នុងអ័ព្ទ  
 កំរិត  $\vec{\nabla} h$  ខ្ពស់

# Directional Derivative & Gradient ใน 3 มิติ



$$\hat{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} \quad , \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

•  
•  
•

$$\frac{dh}{dl} = \left( \frac{\partial h}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial h}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k})$$

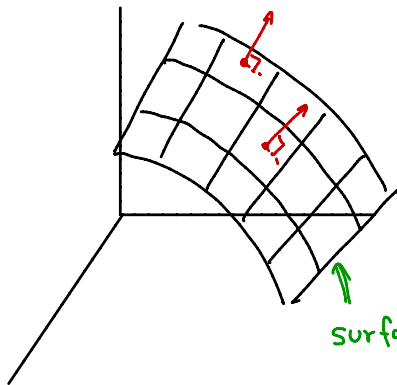
$$\frac{dh}{dl} = \vec{\nabla} h \cdot \hat{u}$$

↑  
directional  
derivative

↑      ↑  
Gradient      direction

- ขนาด คือ ความชัน
- ทิศชี้ไปทางที่ความชันสูงสุด

$\vec{\nabla} h$  is normal to contour surface



surface where  $h = \text{constant}$

ตัวอย่าง กำหนดให้  $f(x, y, z) = xy^2 + yz$  และพิจารณาที่จุด  $(1, 1, 2)$

- 1 จงหาความชันที่จุดนี้ในทิศ  $\vec{u} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$
- 2 จงหาทิศที่ความชันสูงสุดที่จุดนี้
- 3 จงหาระนาบที่สัมผัสกับพื้นผิว  $xy^2 + yz = 3$  ที่จุดนี้

$$f = xy^2 + yz$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \\ &= y^2 \hat{i} + (2xy + z) \hat{j} + y \hat{k}\end{aligned}$$

$$(1, 1, 2) \quad \vec{\nabla} f = \hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{df}{dl} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = (\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) \cdot \frac{2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \text{ทิศ } \vec{\nabla} f \Rightarrow \frac{\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้  $f(x, y, z) = xy^2 + yz$  และพิจารณาที่จุด  $(1, 1, 2)$

- 1 จงหาความชันที่จุดนี้ในทิศ  $\vec{u} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$
- 2 จงหาทิศที่ความชันสูงสุดที่จุดนี้
- 3 จงหาระนาบที่สัมผัสกับพื้นผิว  $xy^2 + yz = 3$  ที่จุดนี้

$$f = xy^2 + yz = \text{คงที่}$$

หาเวกเตอร์ของ  $\Rightarrow \nabla f$  เป็นเวกเตอร์ของ

$$\nabla f = \hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$

หาเวกเตอร์ของ  $\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{u} = \vec{r}_0 \cdot \vec{u}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x + 4y + z = 7$$

## ตัวอย่าง Gradient ในฟิสิกส์ (Temperature and Heat Flux)

$$T = T(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} T = \text{temperature gradient}$$

$$\vec{\phi} \propto -\vec{\nabla} T$$

$$\vec{\phi} = -k \vec{\nabla} T$$

↑  
heat flux

↑  
thermal conductivity

( $k$  มาก  $\Rightarrow \phi$  มาก  $\Rightarrow$  นำความร้อนดี)

## ตัวอย่าง Gradient ในฟิสิกส์ (Force and Potential Energy)

$$V(x, y, z) = \text{พลังงานศักย์}$$

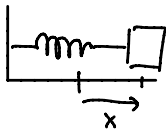
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

ตัวอย่าง ศักย์โน้มถ่วง  $V = mgz$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = -mg \hat{k}$$

ตัวอย่าง ศักย์สปริง  $V = \frac{1}{2} kx^2$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} \\ &= -kx \hat{i} = -k\vec{x}\end{aligned}$$



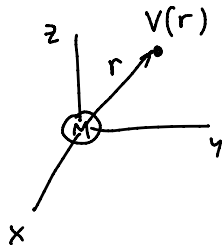


# ตัวอย่าง Gradient ในฟิสิกส์ (Force and Potential Energy)

ตัวอย่าง พหุนาม  
ศักย์โน้มถ่วง

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

$$= -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \dots \hat{j} + \dots \hat{k}$$

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cdot 2x = \frac{GMm x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right]$$

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} [x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$$

## ตัวอย่าง Gradient ในฟิสิกส์ (Electric Field and Electric Potential)

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

$$q\vec{E} = -\vec{\nabla}(q\phi)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

↗  
Electric  
field

↖  
Electric  
potential

## Vector derivative & Del operator

$$\text{Del} \quad \vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$\uparrow$   
Del Operator

$$\text{Gradient} \quad \vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

$\uparrow$   
Scalar field  $\phi(x, y, z)$

Vector field  $\vec{v}(x, y, z)$

Is  $\vec{\nabla}$  a scalar or a vector?

## Gradient

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{k}$$

$\phi$  = scalar field

$\vec{\nabla} \phi$  = vector field

## Divergence

$$\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

นิยาม

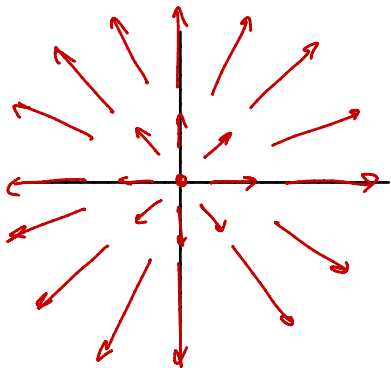
Divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\vec{V} = \text{vector field}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{scalar field}$$



$$\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \vec{r}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  บอกรate/ปริมาณของ divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow \text{พื้บอบจากจุดนั้น}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \text{พื้บอบเข้าจุดนั้น}$$

Curl

สูตร  
curl

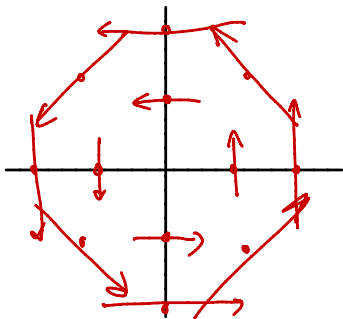
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{j} \\ + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$\vec{v}$  = vector field

$\vec{\nabla} \times \vec{v}$  = vector field

$$\vec{v} = -y \hat{i} + x \hat{j}$$

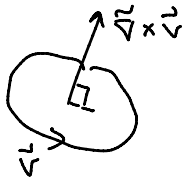


$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= 2 \hat{k}$$

$\nabla \times \vec{v}$  von  $\vec{v}$   $\nabla \times \vec{v}$  von vector field





# Second Derivative

# Laplacian ในฟิสิกส์

# Quiz

อนุภาคสองอันเคลื่อนที่โดยมีตำแหน่งเป็นฟังก์ชันของเวลาดังนี้

$$\vec{r}_1 = ut \hat{i}$$

$$\vec{r}_2 = ut \hat{i} + \left( ut - \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{j}$$

จงหา  $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)$