Conservative Fields & Stoke's Theorem

Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 26 November 2020

Second Derivative

First derivative

$$\vec{\nabla}\phi$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{v}$$

Second derivative

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + (\ldots)\hat{j} + (\ldots)\hat{k}$$

$$= \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\ldots \right) \hat{j} + \left(\ldots \right) \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\ldots \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\ldots \right]$$

$$= 0$$

$$\vec{\nabla} \circ (\vec{\nabla}\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$= \nabla^2 \phi = \Delta \phi$$

Laplacian $= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

vector Laplacian

$$\nabla^2 v_x \hat{i} + \nabla^2 v_y \hat{j} + \nabla^2 v_z \hat{k}$$

First derivative

$$\vec{\nabla}\phi$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{v}$$

Second derivative

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \nabla^2\phi$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = 0$$
$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$$

[เขียนได้ในรูป 2 อัน ที่เหลือ 0]

Laplacian ในฟิสิกส์

EM: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$-\nabla^2\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ ← Poisson Equation

Wave Eq. $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ (1 มิติ)

$$\Downarrow$$

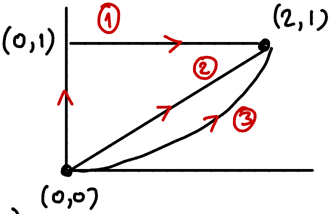
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Schrodinger's Eq. / Diffusion Eq. / Heat conduction Eq.

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{a}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

ตัวอย่าง สนามแรงกำหนดโดย $\vec{F} = xy\hat{i} - y^2\hat{j}$ จงหางานที่แรงนี้กระทำจากจุด $(0,0)$ ถึงจุด $(2,1)$ ผ่านเส้นทางต่อไปนี้

1. เส้นตรงจาก $(0,0) \to (0,1)$ ต่อด้วยเส้นตรงจาก $(0,1) \to (2,1)$
2. เส้นตรงจาก $y = \frac{1}{2}x$
3. พาราโบลา $y = \frac{1}{4}x^2$

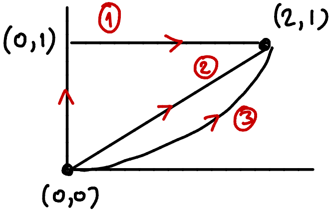


$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int (xy\hat{i} - y^2\hat{j})(dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

$$= \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

$$W = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$



เส้นทาง 1 :

ช่วงแรก $dx = 0$, $x = 0$, $y = 0 \to 1$

$$W_1 = -\int_{y=0}^{1} y^2\,dy = -\frac{1}{3}$$

ช่วงสอง $dy = 0$, $y = 1$, $x = 0 \to 2$

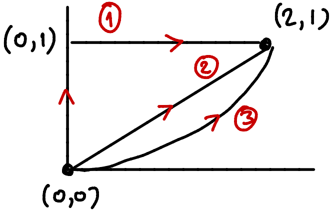
$$W_2 = \int_{x=0}^{2} x\underset{y=1}{y}\,dx = \int_0^2 x\,dx = 2$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{5}{3}$$

$$W = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

เส้นทาง 2 : $y = \frac{1}{2}x$, $dy = \frac{1}{2}dx$

$x = 0 \to 2$



$$W = \int_{x=0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)dx - \int_{x=0}^{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{dx}{2}\right)$$

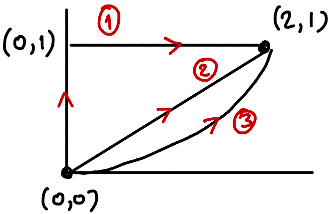
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx - \frac{1}{8}\int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^2 x^2\,dx = 1$$

$$W = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

เส้นทาง ③ : $y = \frac{1}{4}x^2$, $dy = \frac{1}{2}x\,dx$

$x = 0 \to 2$



$$W = \int_0^2 x\left(\frac{1}{4}x^2\right)dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\left(\frac{1}{2}x\,dx\right)$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{32}\right)dx$$

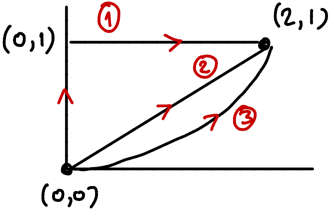
$$= \frac{2}{3}$$

$\rightarrow$ W ขึ้นกับเส้นทางที่ใช้

$\Rightarrow$ non-conservative field

ตัวอย่าง ตัวอย่าง สนามแรงกำหนดโดย $\vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j}$
จงหางานที่แรงนี้กระทำจากจุด $(0,0)$ ถึงจุด $(2,1)$ ผ่านเส้นทางต่อไปนี้

1. เส้นตรงจาก $(0,0) \to (0,1)$ ต่อด้วยเส้นตรงจาก $(0,1) \to (2,1)$
2. เส้นตรงจาก $y = \frac{1}{2}x$
3. พาราโบลา $y = \frac{1}{4}x^2$

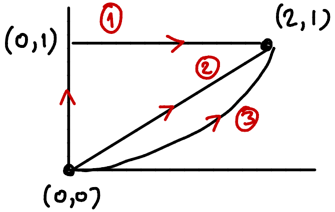


$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int (x\hat{i} + 2y\hat{j}) \cdot (dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j})$$

$$= \int x\,dx + \int 2y\,dy$$

$$W = \int x\,dx + \int 2y\,dy$$



เส้นทาง 1

ช่วงแรก $x=0,\ dx=0,\ y=0\to 1$

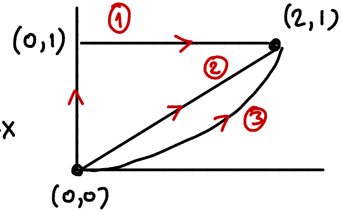
$$W_1 = \int_{y=0}^{1} 2y\,dy = 1$$

ช่วงที่ 2 $y=1,\ dy=0,\ x=0\to 2$

$$W_2 = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

$$W = W_1 + W_2 = 3$$

$$W = \int x\,dx + \int 2y\,dy$$



เส้นทาง 3 : $y = \frac{1}{4}x^2 \;,\; dy = \frac{1}{2}x\,dx$

$x = 0 \to 2$

$$W = \int_0^2 x\,dx + \int_0^2 2\left(\frac{1}{4}x^2\right)\left(\frac{1}{2}x\,dx\right)$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{4}x^3\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)\Big|_0^2 = 3$$

W เท่ากันทุกเส้นทาง

$\Rightarrow$ conservative field

Conservative Field

สนามเวกเตอร์ $\vec{F}$

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

จากจุด A ถึงจุด B
ผ่านเส้นทาง L

non-conservative

W ขึ้นกับ A, B, L

conservative

W ขึ้นกับ A, B แต่ไม่ขึ้นกับ L

- มีพลังงานศักย์
- $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

$\vec{F}$ conservative

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

สมมติ $\quad \vec{F} = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$

$$W = \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$= \int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz\right)$$

$$= \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A)$$

ไม่ขึ้นกับ
เส้นทาง

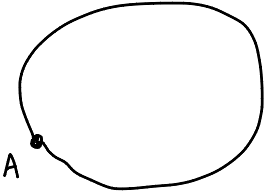
potential

$\boxed{\text{F เป็น conservative field} \Rightarrow \text{เขียน } \vec{F} = \vec{\nabla}\phi \text{ ได้}}$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \phi(A) - \phi(A)$$

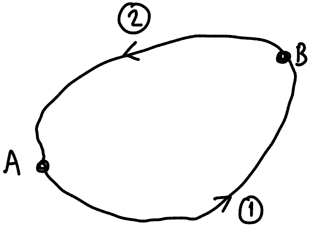
$$= 0$$



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A,①}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{B,②}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{A,①}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{A,②}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= 0$$



$\boxed{\vec{F} \text{ is conservative} \Rightarrow \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$

$\vec{F}$ เป็น conservative

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$$

$$\boxed{\text{ถ้า } \vec{F} \text{ เป็น conservative} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0}$$

Conservative Field $\vec{F}$

① $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ไม่ขึ้นกับเส้นทาง L

(เส้นทาง L) ขึ้นกับแค่จุดเริ่มต้น / จุดสิ้นสุด

② $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ เส้นทางใดๆ

③ เขียน $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ ได้

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

④ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

<u>ตัวอย่าง</u> สนามแรงถูกกำหนดโดย $\vec{F} = (2xy - z^3)\hat{i} + x^2\hat{j} - (3xz^2 + 1)\hat{k}$

1. สนามนี้เป็นสนามอนุรักษ์หรือไม่
2. ถ้าเป็นแรงอนุรักษ์ จงหาสนามศักย์

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy - z^3 & x^2 & -(3xz^2+1) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0 - 0) + \hat{j}\left(-3z^2 - (-3z^2)\right) + \hat{k}(2x - 2x)$$

$$= \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ อนุรักษ์

$$\vec{F} = (2xy - z^3)\,\hat{i} + x^2\,\hat{j} - (3xz^2 + 1)\,\hat{k}$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy - z^3 \Rightarrow \phi = x^2 y - xz^3 + f(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \Rightarrow \phi = x^2 y + g(x,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -3xz^2 - 1 \Rightarrow \phi = -xz^3 - z + h(x,y)$$

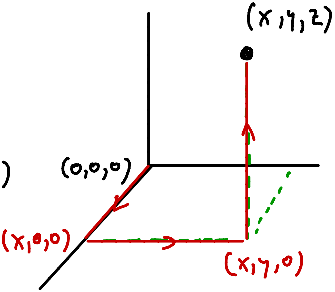
$$\phi = x^2 y - xz^3 - z + \text{Const}$$

วิธีหา ϕ อีกวิธี

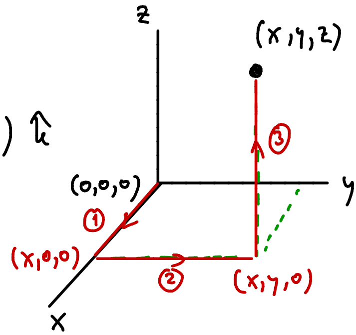
หา $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ จาก $(0,0,0) \rightarrow (x,y,z)$ ก็ได้

$$\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

$$\int_{\text{จุดอ้างอิง}}^{(x,y,z)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(x,y,z) - \phi(\text{อ้างอิง})$$



$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \text{ on } (0,0,0) \to (x,y,z)$$



$$\vec{F} = (2xy - z^3)\,\hat{i} + x^2\,\hat{j} - (3xz^2 + 1)\,\hat{k}$$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (2xy - z^3)\,dx$$

$$+ \int x^2\,dy$$

$$+ \int -(3xz^2+1)\,dz$$

① : $(0,0,0) \to (x,0,0)$, $dy = dz = 0$, $y = z = 0$

x on $0 \to x$

$$W_1 = \int_0^x (2xy - z^3)\,dx = 0$$

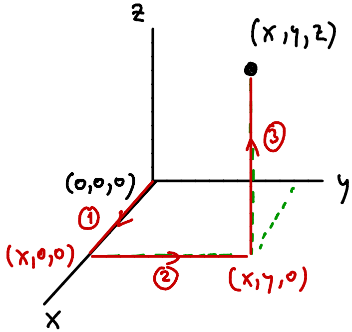
②: $(x,0,0) \to (x,y,0)$

$x = x =$ คงที่ , $z = 0$

$dx = dz = 0$

y จาก $0 \to y$

$$W_2 = \int_0^y x^2\,dy = x^2 y$$



③ $(x,y,0) \to (x,y,z)$

$dx = dy = 0$, $x =$ คงที่ , $y =$ คงที่ , z จาก $0 \to z$

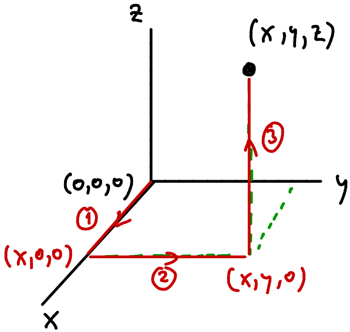
$$W_3 = -\int_{z=0}^{z} (3xz^2 + 1)\,dz = -xz^3 - z$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + x^2 y - xz^3 - z$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(x,y,z) - \phi(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = x^2 y - xz^3 - z + \phi(0,0,0)$$



Curl and Circulation

Stoke's Theorem

<u>ตัวอย่าง</u> Ampere's Law

ตัวอย่าง Faraday's Law

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\vec{F} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$ จงหา

1. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$
2. $\iint \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$

รอบพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าบนระนาบ xy ที่ถูกล้อมรอบด้วยจุด $(0,0), (0,a), (b,0)$ และ (a,b)

Quiz

$$\phi = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

จงหา $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\phi^3} \vec{v} \right)$