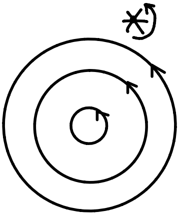
Stoke's Theorem & Divergence Theorem

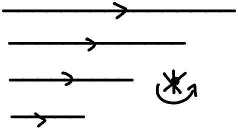
Petchara Pattarakijwanich

SCPY205, 3 December 2020

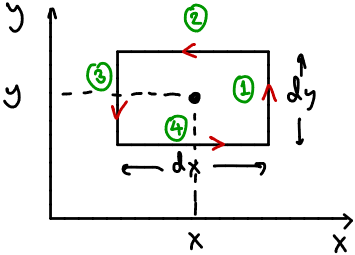
Stoke's Theorem

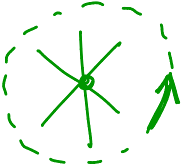
Curl $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ วัดการหมุน





Circulation $\equiv \oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$ รอบพื้นที่เล็กๆ





$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = v_{y,1}\, dy - v_{x,2}\, dx - v_{y,3}\, dy + v_{x,4}\, dx$$

$d\vec{r} = -dx\,\hat{i}$

$-dy\,\hat{j}$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = v_{y,1}\, dy - v_{x,2}\, dx - v_{y,3}\, dy + v_{x,4}\, dx$$

$$v_{y,1} = v_y\left(x + \frac{dx}{2}, y\right)$$

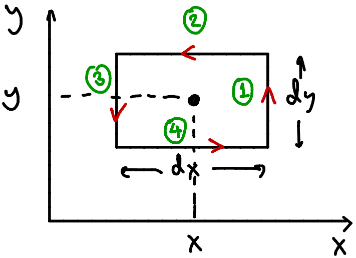
$$= v_y(x,y) + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2}$$

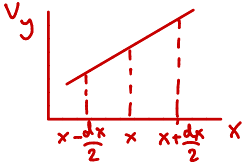
$$v_{y,1} = v_y + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} dx$$

$$v_{x,2} = v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$$

$$v_{y,3} = v_y - \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} dx$$

$$v_{x,4} = v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} dy$$





$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{r} = v_{y,1}\,dy - v_{x,2}\,dx - v_{y,3}\,dy + v_{x,4}\,dx$$

$$= \left(v_y + \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)dy - \left(v_x + \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y}dy\right)dx$$

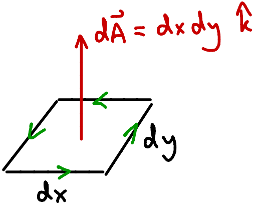
$$- \left(v_y - \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)dy + \left(v_x - \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y}dy\right)dx$$

$$= \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\,dy - \frac{\partial v_x}{\partial y}dx\,dy$$

$$= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= (\vec{\nabla}\times\vec{v})_z\;dx\,dy$$

$$= (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A}$$



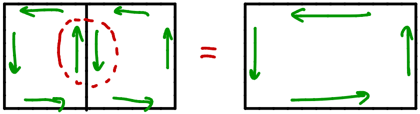
$$\sum \underbrace{\oint \vec{v}\cdot d\vec{r}}_{\text{รอบ พท. เล็กๆ}} = \sum (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A}$$

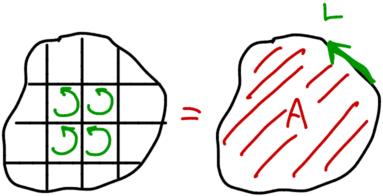
บวก พท. เล็กๆ
ทั้งหมดเข้าด้วยกัน

$$\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A}$$

L: path รอบ A

A: พท.ใหญ่ๆ

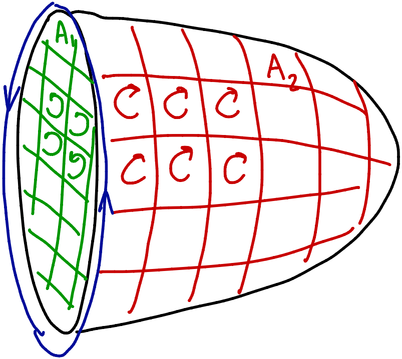




$$\boxed{\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A}}$$

Stoke's theorem

L ล้อมพื้นที่ A



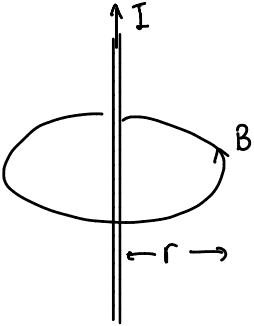
$$\oint_L \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla}\times\vec{v})\cdot d\vec{A}$$

ขึ้นกับขอบ

ขึ้นกับตัวฟังก์ชัน

(เท่ากันสำหรับทุกพื้นที่ที่ขอบเดียวกัน)

<u>ตัวอย่าง</u> Ampere's Law



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enclosed}$$

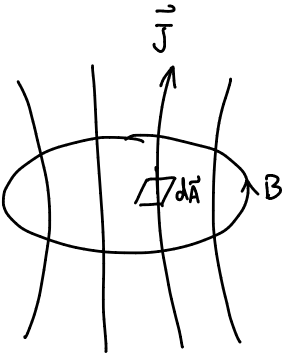
$$B\, 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$\vec{J}$ = current density

$\Rightarrow \quad dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$

$$I_{enclosed} = \int_{\text{พื้นที่ } A} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_A \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

[Integral Form]

$\Updownarrow$

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \int_A \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

[Differential Form]

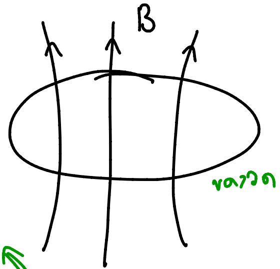
[ต้องมี displacement current]

<u>ตัวอย่าง</u> Faraday's Law

$$\text{emf} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_A \vec{B}\cdot d\vec{A}\right]$$

L ล้อม A



[Integral Form]

$$\int_A (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{A} = \int_A \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot dA$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

[Differential form]

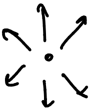
ตัวอย่าง Conservative Field

- $\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$ ไม่ขึ้นกับเส้นทาง
- $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$
- $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$
- $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

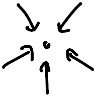
$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 = \int \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{F})}_{=0}\cdot d\vec{A}$$

Divergence Theorem

Divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ วัดการ พุ่งเข้าพุ่งออก



$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} > 0$

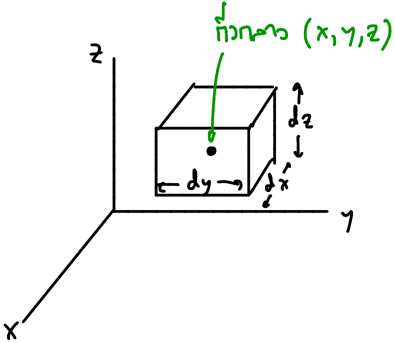


$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} < 0$

พิจารณา Flux รอบปริมาตรเล็กๆ

$$\Phi = \oint \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

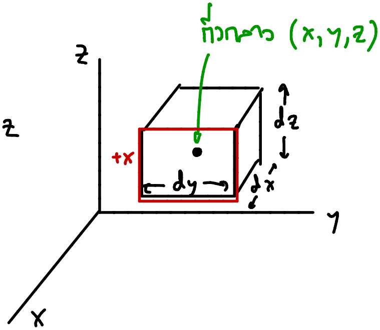
$$\Phi = \Phi_{(+x)} + \Phi_{(-x)} + \Phi_{(+y)} + \Phi_{(-y)} + \Phi_{(+z)} + \Phi_{(-z)}$$



$$\Phi_{(+x)} = V_x\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right) \underbrace{dy\,dz}_{d\vec{A} = dy\,dz\,\hat{i}}$$

$$= \left[V_x(x,y,z) + \frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right] dy\,dz$$

$$= \left(V_x + \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right) dy\,dz$$



$$\Phi_{(-x)} = -V_x\left(x-\frac{dx}{2}, y, z\right) dy\,dz$$

$d\vec{A} = dy\,dz\,(-\hat{i})$

$$= -\left(V_x(x,y,z) - \frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}\right) dy\,dz$$

$$= -\left(v - \frac{1}{2}\frac{\partial V_x}{\partial x}dx\right) dy\,dz$$

$$\Phi_{(+x)} + \Phi_{(-x)} = \frac{\partial V_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

$$\Phi_{(+y)} + \Phi_{(-y)} = \frac{\partial V_y}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

$$\Phi_{(+z)} + \Phi_{(-z)} = \frac{\partial V_z}{\partial z}dx\,dy\,dz$$

$$\Phi = \oint \vec{v}\cdot d\vec{A} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

รอบปริมาตรเล็กๆ

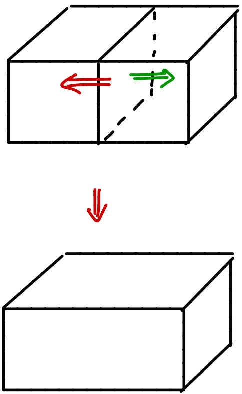
$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\ dV$$

$dV = dx\,dy\,dz$

$$\sum \oint \vec{v}\cdot d\vec{A} = \sum \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\ dV$$

รวมปริมาตรเล็กๆ ติดกัน

ปริมาตรเล็กๆ



$$\oint \vec{v}\cdot d\vec{A} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\ dV$$

$$\boxed{\oint_A \vec{v}\cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\, dV}$$

Divergence Theorem

พื้นที่ A ล้อมรอบปริมาตร V

ตัวอย่าง Gauss' Law (Electric)

$$\Phi_E = \frac{Q_{enclosed}}{\varepsilon_0}$$

ρ = charge density

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

[Integral Form]

$\Updownarrow$

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

[Differential Form]

<u>ตัวอย่าง</u> Gauss' Law (Magnetic)

$$\Phi_B = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

[Integral Form]

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0$$

$\Updownarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

[Differential Form]

ตัวอย่าง Continuity Equation

$$\vec{\Phi} = \text{mass flux} = \text{มวล/พื้นที่/เวลา} \quad (= \rho\vec{v})$$

$$\frac{dm}{dt} = \int \Psi \, dV - \oint \vec{\Phi} \cdot d\vec{A}$$

อัตราการเพิ่ม/ลด ของมวล ต่อ ปริมาตร (source/sink)

การไหล เข้า/ออก จาก ปริมาตร

ปริมาตร V

$$m = \int \rho \, dV$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \Psi \, dV - \int \vec{\Phi} \cdot d\vec{A}$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \int \psi\, dV - \underline{\int \vec{\phi} \cdot d\vec{A}}$$ [Integral form]

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = \int \psi\, dV - \int \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}\, dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \psi - \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}$$ [differential form]

[incompressible fluid $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

โดยที่ $\psi = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$]

ตัวอย่าง สนาม $\vec{F} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$ จงหา

1. $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$
2. $\iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{A}$

โดยอินทิกรัลทั้งสองทำบนพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าบนระนาบ xy ที่นิยามโดยจุด $(0,0),(0,a),(b,0)$ และ (a,b)

ตัวอย่าง สนาม $\vec{F} = r^2\hat{r}$ จงคำนวณ

1. $\oiint \vec{F} \cdot d\vec{A}$
2. $\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV$

โดยอินทิกรัลทั้งสองทำบนทรงกลมรัศมี a ที่มีจุดศูนย์กลางที่ O

สรุป Stoke's & Divergence Theorem

Stoke : $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A}$

L ล้อมพื้นที่ A

Green's Theorem

Divergence : $\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$

พื้นที่ A ล้อมปริมาตร V

Fundamental theorem of Calculus : $f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{df}{dx} dx$

คุณสมบัติของ "ขอบ"

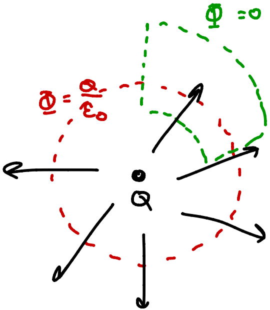
$\int$ "อนุพันธ์" ใน "เนื้อ"

Field ที่มีปัญหา 2 แบบ

แบบที่ 1

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2}\hat{r}$$

จุดประจุ



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

$$\Phi = \underbrace{\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}}_{=\frac{Q}{\varepsilon_0}} = \int \underbrace{\vec{\nabla}\cdot E}_{=0}\, dV$$

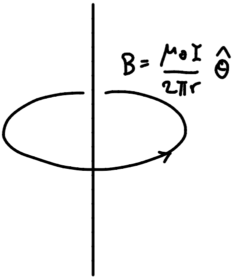
[เฉลย $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ ที่ $r \neq 0$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \infty$ ที่ $r = 0$] $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\delta(r)$

$$\Downarrow$$

$$\int \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$]

แบบที่ 2 $\quad \vec{B} = \frac{\alpha}{r}\hat{\theta}$ $\quad$ เช่นกระแสยาว

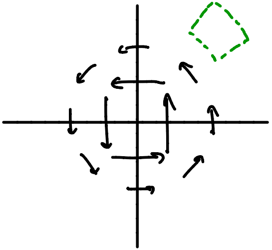
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$



$$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{r}}_{>0} = \int \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{=0} \cdot d\vec{A}$$

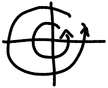
[เลข $\quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 I \delta(r)$$
]



Quiz

พิจารณาสนามแรงสองอันดังนี้



- $\vec{F}_1 = k(-y\hat{i} + x\hat{j})$
- $\vec{F}_2 = k(x\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k})$

สนามใดบ้างที่เป็นสนามอนุรักษ์ และสำหรับสนามอนุรักษ์ให้หาสนามศักย์