

SCPY 205 Midterm Exam (ฉบับทดลองทำ)

ชื่อ _____ เลขประจำตัว _____

ข้อมูลและข้อเสนอแนะ

- การสอบนี้จัดขึ้นในวันพุธที่ xxx เวลา yyz มีเวลาในการทำข้อสอบ zzz ชั่วโมง
- ข้อสอบชุดนี้ประกอบด้วยคำถามจำนวน x ข้อ ข้อสอบมีทั้งหมด y หน้า โดยมีหน้าที่เป็นคำถาม z หน้า
- ข้อสอบนี้มีคะแนนรวม 100 คะแนน คำถามแต่ละข้อมีคะแนนตามที่ระบุไว้ในวงเล็บ
- ให้แสดงวิธีทำในพื้นที่ว่างที่เว้นไว้ในกระดาษคำถาม ถ้าพื้นที่ที่ให้ไม่พอ ให้ใช้พื้นที่ด้านหลังหรือในกระดาษเปล่าที่แนบมาทำข้อสอบ ในกรณีนั้นขอให้เขียนระบุให้ชัดเจนว่ากำลังทำข้อใด
- ขอให้เขียนชื่อนามสกุลและเลขประจำตัวนักศึกษาให้ชัดเจนบนหน้าแรกของข้อสอบ นอกจากนี้ขอให้เขียนเลขประจำตัวนักศึกษาสามตัวสุดท้ายบนกระดาษทุกแผ่น นี้จะมีประโยชน์ในกรณีที่ข้อสอบหลุดออกจากกัน
- อนุญาตให้ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการทำข้อสอบชุดนี้ แต่ไม่อนุญาตให้ใช้โทรศัพท์มือถือหรืออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์อื่นใดช่วย
- ขอให้แสดงวิธีทำให้ชัดเจน เขียนให้เรียบร้อยอ่านง่าย

1. [10 คะแนน]

- (a) [8 คะแนน] กำหนดให้ $z = x + iy$ โดย $x > 0$ และ $y > 0$ จงคำนวณค่า z , iz , i^2z และ i^3z และเขียนจำนวนเหล่านี้ลงบนระนาบเชิงซ้อน
- (b) [2 คะแนน] จากผลที่ได้ จงอธิบายว่าการคูณด้วย i ทำให้เกิดผลอะไรบนระนาบเชิงซ้อน

2. [10 คะแนน] กำหนดให้ $z_1 = \sqrt{3} + i$ และ $z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + iy$ และเขียนลงบนระนาบเชิงซ้อน

(a) [2 คะแนน] $z_1 + \bar{z}_2$ (โดย \bar{z} หมายถึง complex conjugate ของ z)

(b) [4 คะแนน] $z_2^{1/2}$

(c) [4 คะแนน] $\ln(z_1^3)$

3. [15 คะแนน]

(a) [9 คะแนน] จงพิจารณาปริมาณ $e^{i\theta} \times e^{i\phi}$ และ $e^{i\theta}/e^{i\phi}$ และหาสูตรสำหรับ $\cos(\theta \pm \phi)$ และ $\sin(\theta \pm \phi)$

(b) [6 คะแนน] จงใช้ผลที่ได้ในข้อ (a) เพื่อหาค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

(คำใบ้เพื่อนักไม่ถึง $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$)

4. [10 คะแนน] แก๊สไม่อุดมคติชนิดหนึ่งมีทำตัวตาม equation of state ดังนี้

$$PV = RT \exp\left(-\frac{\alpha}{VRT}\right)$$

โดยที่ P คือความดัน V คือปริมาตร T คืออุณหภูมิ และ R และ α เป็นค่าคงที่ จงหาอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้

- (a) [3 คะแนน] $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$
- (b) [3 คะแนน] $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$
- (c) [4 คะแนน] $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

5. [10 คะแนน] กำหนดให้ u และ v สามารถเขียนในรูป x และ y ได้ดังนี้
 $u = x^2 - y^2$ และ $v = 2xy$

(a) [4 คะแนน] จงเขียน $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ ให้อยู่ในรูปของ $\frac{\partial z}{\partial u}$ และ $\frac{\partial z}{\partial v}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

(b) [4 คะแนน] พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์นี้

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

จงแสดงว่าเมื่อเปลี่ยนตัวแปรต้นจาก (x, y) ให้อยู่ในรูป (u, v) แล้ว สมการนี้สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

(c) [2 คะแนน] จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ที่เป็นผลลัพธ์ของข้อ (b)

6. [15 คะแนน] จงหาจุด stationary point ทั้งหมดของฟังก์ชัน

$$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

และหาว่าจุดใดเป็นจุดสูงสุด จุดต่ำสุด หรือไม่ใช่ทั้งจุดสูงสุดต่ำสุด

7. [15 คะแนน] แผ่นโลหะที่วางอยู่บนระนาบ xy มีอุณหภูมิที่ตำแหน่งใดๆ กำหนดโดยสมการ $T(x, y) = 6xy$ จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 8$ ที่มีอุณหภูมิต่ำสุด

8. [15 คะแนน] จงเขียนสมการ Euler equation เพื่อหาฟังก์ชัน $y(x)$ ที่ทำให้ integral I ต่อไปนี้มีค่าน้อยที่สุด

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

และแก้สมการนี้เพื่อหา $y(x)$ โดยใช้เงื่อนไขว่า $y(x)$ ต้องผ่านจุด $(x_1, y_1) = (1, -1)$ และ $(x_2, y_2) = (1, 1)$

หน้านี้เป็นกระดาษเปล่า ให้ใช้ได้ถ้าต้องการพื้นที่เขียนคำตอบเพิ่ม กรุณาเขียนเลขข้อที่กำลังทำให้ชัดเจน

หน้านี้เป็นกระดาษเปล่า ให้ใช้ได้ถ้าต้องการพื้นที่เขียนคำตอบเพิ่ม กรุณาเขียนเลขข้อที่กำลังทำให้ชัดเจน