# SCPY208 การบ้านชุดที่ 2

**ส่งภายในวันศุกร์ที่ 5 มีนาคม 2564**

1. จงหาค่า expected value และ standard deviation ของตัวแปรสุ่ม $x$ ในกรณีต่อไปนี้

   (a) โยนเหรียญสามเหรียญ ให้ตัวแปร $x$ มีค่าเป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวลบด้วยจำนวนครั้งที่ออกก้อย

   (b) โยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน ให้ตัวแปร $x$ มีค่าเท่ากับผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองเมื่อผลคูณนั้นเป็นเลขคี่ ถ้าผลคูณนั้นเป็นเลขคู่ให้ $x = 0$

   (c) ตัวแปร $x$ มีค่าเป็น 0,1,2,3 ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}$ ตามลำดับ

2. เหรียญถูกถ่วงให้ไม่สมมาตร ทำให้มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัวในการโยนแต่ละครั้งเป็น $p$ เหรียญนี้ถูกโยน 3 ครั้ง ให้ตัวแปร $x$ มีค่าเป็นจำนวนครั้งที่เหรียญออกหัวลบด้วยจำนวนครั้งที่ออกก้อย

   (a) จงหา expected value และ standard deviation ของ $x$

   (b) แทนค่ากรณีพิเศษที่ $p = 0,\ \ p = 1,\ \ p = \frac{1}{2}$ คำตอบที่ได้ลดรูปลงไปเป็นคำตอบที่คาดหวังหรือไม่

3. ในงานวัดแห่งหนึ่งมีเกมให้เล่น โดยเสียค่าเล่นครั้งละสิบบาท ในเกมนี้เราจะได้โยนลูกเต๋าสองลูก โดยจะได้เงินรางวัลเท่ากับผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสอง เราควรจะจ่ายเงินเพื่อเล่นเกมนี้หรือไม่

4. ตัวแปรสุ่ม $x$ ถูกอธิบายด้วย probability density function ที่กำหนดโดยฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{if } 0 \le x \le x_0 \\ a(2x_0 - x) & \text{if } x_0 < x \le 2x_0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \text{ or } x > 2x_0 \end{cases}$$

   (a) จงหาค่า $a$

   (b) จงหา expected value ของ $x$

   (c) จงหา variance และ standard deviation ของ $x$

   (d) ค่าที่มากที่สุดและน้อยที่สุดที่ $x$ มีค่าได้คือเท่าไหร่

5. อนุภาคหนึ่งมีการเคลื่อนที่แบบ simple harmonic motion ตามสมการการเคลื่อนที่ $x(t) = a\cos\omega t$

   (a) จงหา probability density function $f(x)$ ที่อธิบายความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคนี้ที่ตำแหน่ง $x$

   (b) จงวาดกราฟของ $f(x)$ และหา expected value และ standard deviation ของ $x$

6. ใน ground state ของ quantum harmonic oscillator ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่งระหว่าง $x$ และ $x+dx$ มีค่าแปรผันตรงกับ $e^{-\alpha^2 x^2}dx$ โดยที่ $\alpha$ เป็นค่าคงที่

   (a) จงหา probability density function $f(x)$

   (b) จงหา expected value และ standard deviation ของ $x$

   (c) จงเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลจากข้อก่อน (classical harmonic oscillator)

7. จาก kinetic theory ของก๊าซเรารู้ว่าความน่าจะเป็นที่โมเลกุลจะเคลื่อนที่ได้เป็นระยะทางระหว่าง $x$ และ $x+dx$ ระหว่างการชนสองครั้งจะมีค่าแปรผันตรงกับ $e^{-x/\lambda}dx$ โดยที่ $\lambda$ เป็นค่าคงที่

   (a) จงหาระยะทางเฉลี่ยที่โมเลกุลเคลื่อนที่ได้ระหว่างการชนสองครั้ง (ค่านี้เรียกว่า mean free path)

   (b) จงหาความน่าจะเป็นที่โมเลกุลหนึ่งจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางมากกว่า $2\lambda$ ระหว่างการชนสองครั้ง

8. ความน่าจะเป็นที่อะตอมหนึ่งที่ไม่เสถียรจะสลายตัวระหว่างเวลา $t$ ถึง $t+dt$ แปรผันตรงกับ $e^{-\lambda t}dt$

   (a) จงหา probability density function $f(t)$ ที่อธิบายเวลาที่อะตอมนี้ใช้ในการสลายตัว

   (b) จงหา expected value ของเวลาที่อะตอมนี้ใช้ในการสลายตัว (ค่านี้เรียกว่า mean lifetime)

9. ความน่าจะเป็นที่อิเล็กตรอนใน ground state ของอะตอมไฮโดรเจนจะอยู่ที่ปริมาตรเล็กๆ $dV$ ที่อยู่ที่ระยะห่างระหว่าง $r$ และ $r+dr$ จากโปรตอนมีค่าแปรผันตรงกับ $e^{-2r/a}dV$ โดยที่ $a$ คือ Bohr's radius

   (a) จงใช้ spherical coordinate เพื่อเขียน $dV$ ในรูปของ $r$ และ $dr$ และหา probability density function $f(r)$ ที่อธิบายความน่าจะเป็นที่จะพบอิเล็กตรอนที่ระยะห่าง $r$ จากโปรตอน

   (b) จงแสดงว่า $f(r)$ มีค่ามากที่สุดที่ $r=a$

   (c) จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยของ $r^{-1}$ มีค่าเป็น $a^{-1}$

10. จงพิสูจน์ข้อความเหล่านี้สำหรับตัวแปรสุ่ม (ทั้งแบบต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง)

    (a) จงพิสูจน์ว่า $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

    (b) ตัวแปรสุ่ม $x$ มี expected value เป็น $\mu$ และ standard deviation เป็น $\sigma$ จงแสดงว่าตัวแปรสุ่ม $ax+b$ (โดย $a$ และ $b$ เป็นค่าคงที่) จะมี expected value เป็น $a\mu+b$ และ standard deviation เป็น $a\sigma$