

Sample Space, Probability & Probability Theory (I)

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 25 January 2020

ตัวอย่าง โยนเหรียญสองเหรียญพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะออกหัว 1 เหรียญ

Outcome : hh ht th tt

หัว = head
ก้อย = tail

$$P(1 \text{ หัว}) = \frac{\text{จำนวน Outcome หัว 1 หัว}}{\text{จำนวน outcome ทั้งหมด}}$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง โยนเหรียญสองเหรียญพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะออกหัว 1 เหรียญ (แต่เพื่อนแอบเปิดดูแล้วบอกว่ามีอย่างน้อยหนึ่งเหรียญที่ออกหัว)

Outcome
ที่เงา 1076

hh (ht) (th) ~~tt~~

$$P(1 \text{ หัว}) = \frac{2}{3}$$

ความน่าจะเป็น ขึ้นกับ Prior Knowledge

ความน่าจะเป็น = โทคนไหนเก็บได้ outcome แล้ว
จาก ข้อมูลที่ ยังไม่รู้ผลลัพธ์

ແທວຕຸກ \rightarrow 2 ຫ້າ

ແທວຝຸດ \rightarrow 0

ແທວລຳດັ່ງ 1 10 ທາກ \rightarrow ຝຸດ

ແທວລຳດັ່ງ 2 20 ທາກ \rightarrow ຝຸດ

3 40 ທາກ

4 80

5 160

\vdots

$$1+2+4 = 8-1$$

$$1+2+4+8 = 16-1$$

\vdots

$$1+2+\dots+2^{n-1} = 2^n - 1$$

ตัวอย่าง โยนเหรียญพร้อมกันสามเหรียญ จงหา

- ① ความน่าจะเป็นที่มี 1 หัว
- ② ความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อย 1 หัว

Sample Space (แซมเปิลสเปซ)
↓

Outcome	hhh	hht	hth	htt	thh	tht	tth	ttt
probability	$\frac{1}{8}$ ✓	$\frac{1}{8}$ ✓	$\frac{1}{8}$ ✓	$\frac{1}{8}$ ✓✓	$\frac{1}{8}$ ✓	$\frac{1}{8}$ ✓✓	$\frac{1}{8}$ ✓✓	$\frac{1}{8}$

$$\textcircled{1} \quad P(1 \text{ หัว}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\textcircled{2} \quad P(\geq 1 \text{ หัว}) = \frac{7}{8}$$

Sample space (ผลรวม 2)

Outcome	0 $\bar{u}u$	1 $\bar{u}u$	2 $\bar{u}u$	3 $\bar{u}u$
Probability	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$ ✓	$\frac{3}{8}$ ✓	$\frac{1}{8}$ ✓

$$\textcircled{1} \quad P(1 \bar{u}u) = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad P(\geq 1 \bar{u}u) &= P(1 \bar{u}u) + P(2 \bar{u}u) + P(3 \bar{u}u) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

sample space (รวม 3)

Outcome	๒๕๗	๖๗๕๕๗
Probability	$\frac{7}{8}$ ✓	$\frac{1}{8}$

$$\textcircled{1} \quad P(1 \text{ ๕๗}) = ??$$

$$\textcircled{2} \quad P(\geq 1 \text{ ๕๗}) = \frac{7}{8}$$

Sample Space

นิยาม Sample space

Set ของ outcome ที่เกิดได้
และอาจนำใจเกิดของ event outcome

นิยาม probability

Probability ของ event หนึ่ง = ผลรวมของ Prob ของทุก outcome
ที่สอดคล้องกับ event หนึ่ง

เงื่อนไขของ sample space

- Mutually exclusive
- Collectively Exhaustive

ตัวอย่างที่ 1

outcome : 1 นิ้ว , 2 นิ้ว

outcome : 0 นิ้ว , 1 นิ้ว , 2 นิ้ว

ตัวอย่าง โยนลูกเต๋าสองลูก จงหา

- ① ความน่าจะเป็นที่แต้มรวมเป็น 6
- ② ความน่าจะเป็นที่แต้มจะต่างกันอยู่ 2

Sample space

แต้มรวม = 6

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

แต้มต่าง = 2

$$P = \frac{1}{36} \text{ หน้าที่ขุดก้น }$$

$$P(\text{รวม} = 6) = \frac{5}{36}, \quad P(\text{ต่าง} = 2) = \frac{8}{36}$$

die = singular

dice = plural

throw a die = โยน 1 ลูก

sample space 11 หน้า 2

แต้มรวม	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Prob	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

sample space 11 หน้า 3

แต้มต่าง	0	1	2	3	4	5

ตัวอย่าง ในถุงมีลูกบอลสีขาว 2 ลูก บอลสีดำ 3 ลูก หยิบลูกบอลแบบสุ่มทีละลูก (หยิบแล้วไม่ใส่คืน) ออกมาสองลูก

จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกแรกเป็นสีขาวและลูกที่สองเป็นสีดำ

2 \ 1	W	W	B	B	B
W	///				
W		///			
B	✓	✓	///		
B	✓	✓		///	
B	✓	✓			///

วิธีที่ 1

$$P = \frac{\text{จำนวน outcome ของ event}}{\text{จำนวน outcome ทั้งหมด}}$$

$$= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

วิธีที่ 2

$$P = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

↑ ลูกแรกขาว ↑ ลูกสองดำ

A = ลูกอมรสชาต

B = ลูกอมรสส้ม

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

↑
โอกาส

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$$

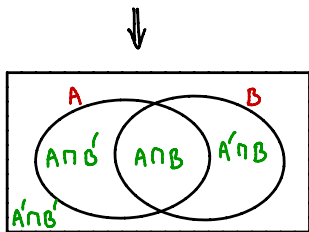
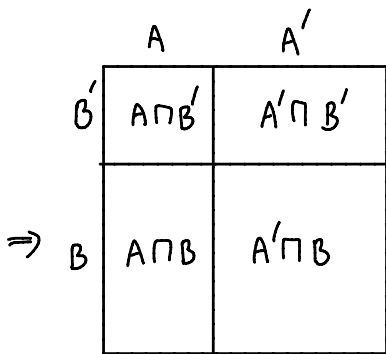
↑
โอกาส (conditional prob)

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

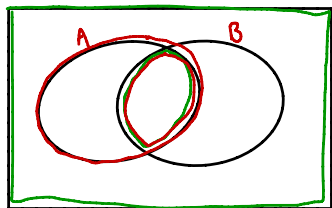
$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B)$$

Bayes' theorem

		A		A'		
		W	W	B	B	B
B'	1					
	2					
B	W	///				
	w		///			
	B	✓	✓	///		
	B	✓	✓		///	
	B	✓	✓			///



Bayes' Theorem



Bayes' theorem

$$P(A \cap B) = P(A) P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N_{\text{total}}}$$

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{P(B|A) N(A)}{N_{\text{total}}} = P(A) P(B|A)$$

ตัวอย่าง ในถุงมีลูกบอลสีขาว 2 ลูก บอลสีดำ 3 ลูก หยิบลูกบอลแบบสุ่มทีละลูก (หยิบแล้วใส่คืน) ออกมาสองลูก

จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกแรกเป็นสีขาวและลูกที่สองเป็นสีดำ

		A		A'		
		W	W	B	B	B
B'	1					
	2					
B	W					
	W					
	B	✓	✓			
B	B	✓	✓			
	B	✓	✓			

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B) &= P(A) P(B|A) \\
 &= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}
 \end{aligned}$$

$$P(B|A) = P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

[A กับ B เป็น independent event]