Sample Space, Probability & Probability Theory (II)

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 2 February 2021

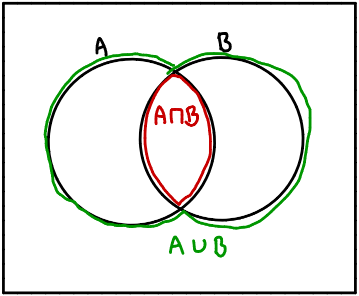
<u>ตัวอย่าง</u> ให้นักเรียนสองคนแยกกันทำโจทย์คณิตศาสตร์ คนแรกมีความน่าจะเป็น $\frac{1}{2}$ ที่จะแก้ได้ คนที่สองมีความน่าจะเป็น $\frac{3}{4}$ ที่จะแก้ได้
จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีอย่างน้อยหนึ่งคนแก้ได้

A = คนที่ 1 แก้ได้ $\qquad$ B = คนที่ 2 แก้ได้

A กับ B independent $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cup B) = ?$$

"หรือ" = อย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทั้งคู่



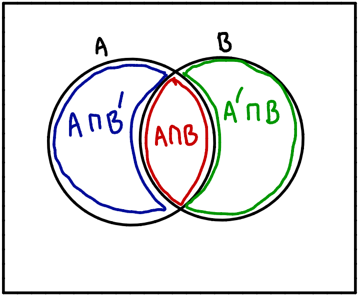
นับก้า $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{8} + \frac{6}{8} - \frac{3}{8}$$

$$= \frac{7}{8}$$



$P(A) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

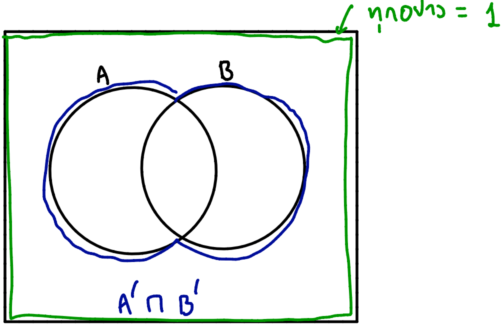
$P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B') = 1 - P(B) = \frac{1}{4}$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$

$$= P(A)P(B) + P(A)P(B') + P(A')P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{7}{8}$$



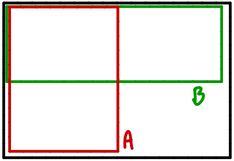
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= 1 - P(A' \cap B') \\
&= 1 - P(A')P(B') \\
&= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

สรุปสูตรเกี่ยวกับ Probability

Bayes' theorem : $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$

$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$

Independent Event

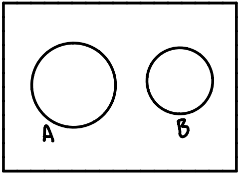


$P(A|B) = P(A)$

$P(B|A) = P(B)$

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Mutually Exclusive Event



$P(B|A) = P(A|B) = P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ตัวอย่าง วิชาหนึ่งมีสอบ pretest ตอนต้น และสอบ final ตอนจบ พบว่า

1. 95% ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่าน final
2. 96% ของนักเรียนที่สอบผ่าน final เคยสอบผ่าน pretest ตอนแรก
3. 25% ของนักเรียนที่สอบตก final เคยสอบผ่าน pretest ตอนแรก

จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนที่ตก pretest จะสอบผ่าน final

A = สอบผ่าน final , B = สอบตก pretest

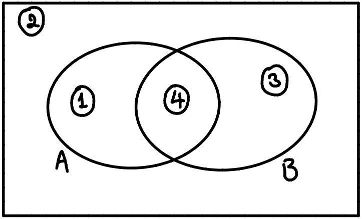
$(\Rightarrow P(A|B) = ?)$

$P(A) = 0.95 \Rightarrow P(A') = 0.05$

$P(B'|A) = 0.96 \Rightarrow P(B|A) = 0.04$

$P(B'|A') = 0.25 \Rightarrow P(B|A') = 0.75$

$P(A|B) = ?$



แนวคิด : - หาความน่าจะเป็นของ 1, 2, 3, 4

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A' \cap B)} \qquad = P(B)$$

$$= \frac{P(4)}{P(4) + P(3)}$$

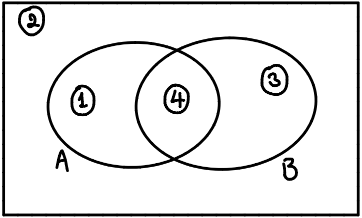
④: $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$

$= 0.95 \times 0.04$

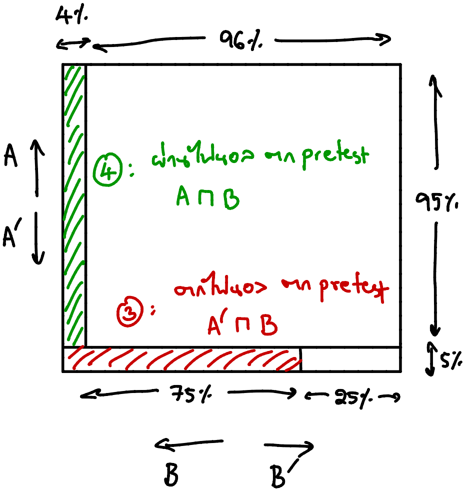
③: $P(A' \cap B) = P(A')\,P(B|A')$

$= 0.05 \times 0.75$

$$P(A|B) = \frac{P(④)}{P(④) + P(③)} = \frac{0.95 \times 0.04}{0.95 \times 0.04 + 0.05 \times 0.75} = 0.503$$



$\Longrightarrow$



$$P(A|B) = \frac{P(4)}{P(4) + P(3)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(\text{เขียว})}{P(\text{เขียว}) + P(\text{แดง})}$$

<u>ตัวอย่าง</u> โรคหายากโรคหนึ่งมีคนเป็น 0.1% ของประชากรทั้งหมด
ชุดตรวจโรคมีความแม่นยำ 99% (ทั้ง positive และ negative)
ถ้านักศึกษาไปตรวจโรคนี้และได้ผลเป็น positive
ความน่าจะเป็นที่นักศึกษาจะเป็นโรคจริงๆ เป็นเท่าไหร่

D = เป็นโรค   ND = ไม่เป็นโรค

+ = positive (พบโรค)   − = negative (ไม่พบโรค)

$$P(D) = 0.001 \Rightarrow P(ND) = 0.999$$

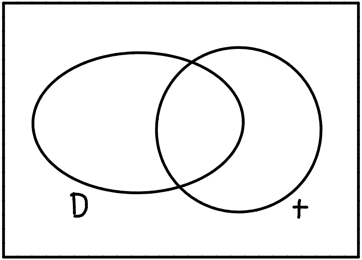
$$P(+|D) = 0.99, \quad P(-|ND) = 0.99 \quad [\text{ตรวจถูก}]$$

$$P(-|D) = 0.01, \quad P(+|ND) = 0.01 \quad [\text{ตรวจผิด}]$$

False negative   False positive

$$P(D|+) = ?$$

$$P(+\cap D) = P(D)P(+|D)$$
$$= 0.001 \times 0.99$$
$$= 0.00099$$



$$P(+\cap ND) = P(ND)P(+|ND)$$
$$= 0.999 \times 0.01 = 0.00999$$

$$P(-\cap D) = P(D)P(-|D)$$
$$= 0.001 \times 0.01 = 0.00001$$

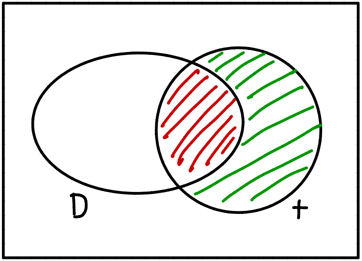
$$P(-\cap ND) = P(ND)P(-|ND)$$
$$= 0.999 \times 0.99 = 0.98901$$

$$P(D|+) = \frac{P(+\cap D)}{P(+)}$$

$$= \frac{P(+\cap D)}{\underbrace{P(+\cap D) + P(+\cap ND)}_{= P(+)}}$$

$$= \frac{\text{แดง}}{\text{แดง} + \text{เขียว}}$$

$$= \frac{0.00099}{0.00099 + 0.00999} \approx \frac{10^{-3}}{10^{-3} + 10^{-2}} \approx 9\%$$



$$P(+\cap D) = 0.00099$$

$$P(+\cap ND) = 0.00999$$

$$P(-\cap D) = 0.00001$$

$$P(-\cap ND) = 0.98901$$

ให้มีคน 100,000 คน

ความจริง / ผลตรวจ	D	ND
+	99	999
−	1	98901

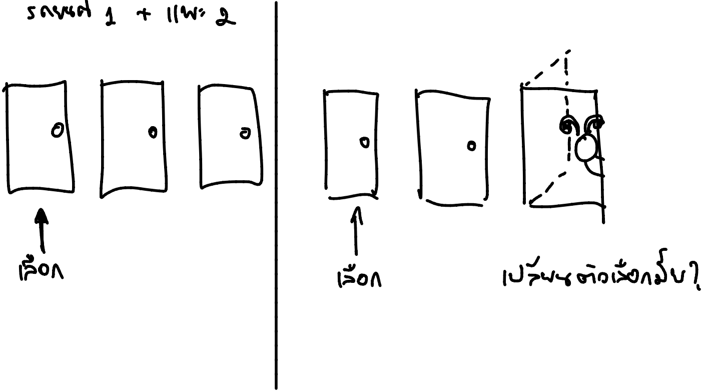
100 คน = 0.1% 99.9%

$$P(D|+) = \frac{99}{99+999}$$

พิธีกรเกมโชว์

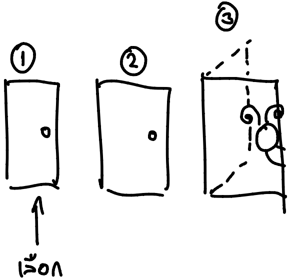
<u>ตัวอย่าง</u> (ปัญหานี้เรียกว่า Monty Hall Problem) ในเกมโชว์หนึ่งมีประตูสามประตูให้ผู้เข้าแข่งขันเลือก โดยในประตูหนึ่งมีรางวัลใหญ่คือรถยนต์ และอีกสองประตูที่เหลือเป็นรางวัลปลอบใจคือแพะ เป้าหมายของผู้เข้าแข่งขันคือต้องการเลือกประตูที่มีรถยนต์ เมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกมาหนึ่งประตู พิธีกรก็เปิดอีกประตูหนึ่งให้ดูว่ามีแพะอยู่ข้างใน หลังจากนั้นพิธีกรก็ถามผู้เข้าแข่งขันว่าจะเปลี่ยนคำตอบมั้ย
ผู้เข้าแข่งขันควรจะเปลี่ยนคำตอบหรือไม่?

รถยนต์ 1 + แพะ 2



$P(\text{รถ } ① \mid \text{เปิด } ③) = \frac{1}{3}$

$P(\text{รถ } ② \mid \text{เปิด } ③) = \frac{2}{3}$



ตัวอย่าง (สมมติว่าความน่าจะเป็นที่เด็กคนหนึ่งจะคลอดเป็นเด็กผู้ชายคือ 1/2)

1. ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน รู้ว่าคนโตเป็นผู้ชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย

   BB BG ~~GB~~ ~~GG~~

   $P = \frac{1}{2}$

2. ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน รู้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นผู้ชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย

   BB BG GB ~~GG~~

   $P = \frac{1}{3}$

3. ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน
   รู้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นผู้ชายที่เกิดในวันอังคาร
   จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย

4. ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน ผู้ชาย + (คุณสมบัติ ความน่าจะเป็น α)
   รู้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นผู้ชายที่เกิดในวันอังคาร เวลาตกฟากตีสองตรงบวกลบห้าวินาที ชื่อจริงขึ้นต้นด้วยอักษร ข และชื่อเล่นลงท้ายด้วยอักษร ง
   จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย