

Random Variables (I)

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 8 February 2021

ตัวอย่าง (สมมติว่าความน่าจะเป็นที่เด็กคนหนึ่งจะคลอดเป็นเด็กผู้ชายคือ $1/2$)

- 1 ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน รู้ว่าคนโตเป็นผู้ชาย
จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย
- 2 ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน รู้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นผู้ชาย
จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย BB BG GB ~~GG~~
- 3 ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน
รู้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นผู้ชายที่เกิดในวันอังคาร
จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย
- 4 ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน $P(\text{คนแรกเกิดในวันอังคาร}) = \alpha$
รู้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นผู้ชายที่เกิดในวันอังคาร เวลาตกฟากตีสองตรง
บวกลบห้าวินาที ชื่อจริงขึ้นต้นด้วยอักษร ข และชื่อเล่นลงท้ายด้วยอักษร ง
จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนจะเป็นผู้ชาย

$$P = \frac{1}{3}$$



B

	၀၁	၁	၂	၃	၄	၅	၆	၇
၀၁				⊗				
၁			⊗					
၂	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
၃			⊗					
၄			⊗					
၅			⊗					
၆			⊗					

B

B

	၀၁	၁	၂	၃	၄	၅	၆	၇
၀၁				○				
၁				○				
၂				○				
၃				○				
၄				○				
၅				○				
၆				○				

G

G

	၀၁	၁	၂	၃	၄	၅	၆	၇
၀၁								
၁								
၂	○	○	○	○	○	○	○	○
၃								
၄								
၅								
၆								

B

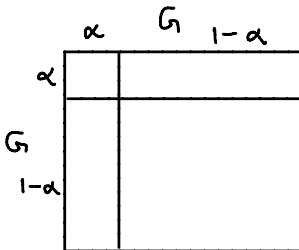
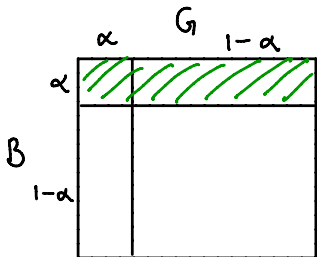
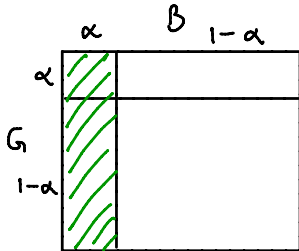
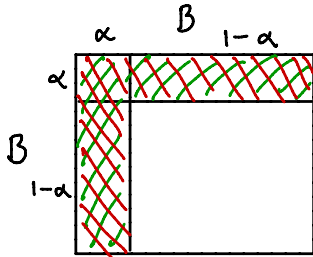
G

	၀၁	၁	၂	၃	၄	၅	၆	၇
၀၁								
၁								
၂								
၃								
၄								
၅								
၆								

G

$$P(\text{ตัว 2} \mid \text{อันดับ 1 และ 2} = \text{ตัวนี้หรือตัวอื่น})$$

$$= \frac{N(\text{ตัว 2})}{N(\text{ตัว})} = \frac{13}{27}$$



$$P(\text{reject } H_0 \mid H_0 \text{ is true}, \alpha) = \frac{\text{wn. } H_0}{\text{wn. } \Omega} = \frac{1 - (1 - \alpha)^2}{1 - (1 - \alpha)^2 + \alpha + \alpha}$$

ตัวอย่าง เกมพนันลูกเต๋าลำเล่นดังนี้ ถ้าโยนได้ 1,2,3 จะเสียเงินหนึ่งบาท ถ้าโยนได้ 4,5 จะได้เงินหนึ่งบาท และถ้าโยนได้ 6 จะได้เงินสี่บาท จงหาว่า

- 1 ในการโยนหนึ่งครั้งจะได้เงินหรือเสียเงินโดยเฉลี่ยเท่าไร
- 2 ค่า standard deviation ของเงินที่ได้หรือเสียต่อครั้งเป็นเท่าไร

Outcome (แต้มลูกเต๋า)	1	2	3	4	5	6	
X (เงินที่ได้/เสีย)	-1	-1	-1	+1	+1	+4	
probability	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

ໂດຍ 6 ລຳດັບ 001 1, 2, 3, 4, 5, 6 ອຸປະກອນ 1 ລຳດັບ

ໄດ້ -1, -1, -1, +1, +1, +4 ອຸປະກອນ 1 ລຳດັບ

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{ກາງສູງ} &= \text{ກາງສູງທັງໝົດ} (-1, -1, -1, +1, +1, +4) \\ \bar{X} &= \frac{\sum X_i}{n} = \frac{-1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 4}{6} = 0.5 \\ &= \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(1) + \frac{1}{6}(4) \\ &= \sum p_i x_i \qquad \bar{x} = \frac{\sum f x}{\sum f} \\ &\qquad \qquad \qquad [\sum p_i = 1] \qquad \qquad \qquad [p_i = \frac{f_i}{\sum f}] \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad SD = SD \text{ of } (-1, -1, -1, +1, +1, +4)$$

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}(-1-0.5)^2 + \frac{1}{6}(-1-0.5)^2 + \frac{1}{6}(-1-0.5)^2 + \frac{1}{6}(1-0.5)^2 + \frac{1}{6}(1-0.5)^2 + \frac{1}{6}(4-0.5)^2}$$

$$SD = \sqrt{\sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\text{Variance} = SD^2 = \sum_i p_i (x_i - \bar{x})^2$$

(Discrete) Random Variable

Outcome ($\omega \in \Omega$)	1	2	3	4	5	6
X ($\omega \mapsto X(\omega)$)	-1	-1	-1	+1	+1	+4
probability	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

random variable ($\omega \mapsto X(\omega)$)

$X =$ function of sample space

$$\Rightarrow P = P(X) \quad [\text{with } X \text{ is } \omega \mapsto X(\omega) \Rightarrow P \text{ is } P(X)]$$

$$\left. \begin{aligned} P(-1) &= \frac{1}{2} \\ P(+1) &= \frac{1}{3} \\ P(+4) &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right\}$$

ໂຕຢ່າງສະເໝີ \Rightarrow X ມີຄ່າໃດໜຶ່ງໃນ set ຈຳນວນ

Discrete
Random
Variable

Outcome	ໂຕຢ່າງ ຈຳນວນ ສອດສອນ
X	
prob	

X ມີຄ່າໃດໜຶ່ງໃນ outcome

$$\Rightarrow \bar{x} = \sum_i p(x_i) x_i$$

= ນິ້ວໂຕຢ່າງສອດສອນ

= ຜູກສ່ວນໂຕຢ່າງ / ຜູກສ່ວນ

$$= (2.5)^2 + 3\sqrt{2.5}$$

= probability ຂອງ outcome ມີ

= 5

$$\text{Variance} = \sum_i p(x_i) (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{Standard deviation} = \sqrt{\text{Variance}}$$

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 3 เหรียญ ให้ x เป็นจำนวนหัวที่ออก จงหา

- 1 ค่าเฉลี่ยของ x
- 2 standard deviation ของ x
- 3 ค่าเฉลี่ยของ \sqrt{x}
- 4 ค่าเฉลี่ยของ x^2

outcome	hhh	hht	hth	htt	thh	tht	tth	ttt
prob	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
x	3	2	2	1	2	1	1	0

↳

x	$p(x)$	\sqrt{x}	x^2
0	$\frac{1}{8}$	0	0
1	$\frac{3}{8}$	1	1
2	$\frac{3}{8}$	$\sqrt{2}$	4
3	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{3}$	9

โยน 8 ครั้ง

0

1

1

1

2

2

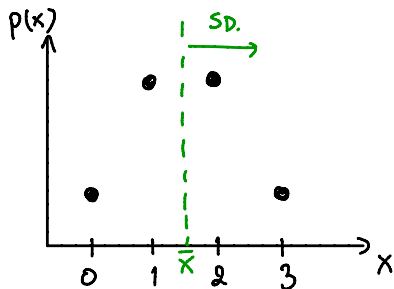
2

3

↓

หาค่าเฉลี่ย
หา SD

x	$p(x)$	\sqrt{x}	x^2
0	$\frac{1}{8}$	0	0
1	$\frac{3}{8}$	1	1
2	$\frac{3}{8}$	$\sqrt{2}$	4
3	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{3}$	9



$$\begin{aligned}\bar{x} &= \sum_i [p(x_i) x_i] \\ &= \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 \\ &= \frac{3}{2} = 1.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var} &= \sum_i [p(x_i) (x_i - \bar{x})^2] \\ &= \frac{1}{8} (0 - 1.5)^2 + \frac{3}{8} (1 - 1.5)^2 \\ &\quad + \frac{3}{8} (2 - 1.5)^2 + \frac{1}{8} (3 - 1.5)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1.5)^2 + \frac{3}{4} (0.5)^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\text{SD.} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ค่าเฉลี่ยของ } \sqrt{x} \quad \overline{\sqrt{x}} &= \sum_i [p(x_i) \sqrt{x_i}] \\ &= \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times \sqrt{2} + \frac{1}{8} \times \sqrt{3} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} \text{ค่าเฉลี่ยของ } x^2 \quad \overline{x^2} &= \sum [p(x_i) x_i^2] \\ &= \end{aligned}$$

$$\text{ค่าเฉลี่ยของ } \overline{g(x)} \text{ ของ } x = \sum_i p(x_i) g(x_i)$$

$$\text{Variance} = \sum p(x_i) (x_i - \bar{x})^2 = \text{ค่าเฉลี่ยของ } (x_i - \bar{x})^2$$

ตัวแปรสุ่ม (ตัวแปรสุ่ม)

Random variable (ตัวแปรสุ่ม) x

$p = p(x)$  probability distribution function
probability density function
"Distribution" \Downarrow PDF

$\bar{x} = \sum p(x_i) x_i \rightarrow$ Expected value of x
 $E(x)$

$\overline{g(x)} = \sum p(x_i) g(x_i) \rightarrow$ Expected value of $g(x)$
 $E(g(x))$

Variance \rightarrow $\text{Var}(x)$

ตัวอย่าง ชื่อสลากกินแบ่งรัฐบาลหนึ่งใบ โดยเฉลี่ยจะได้เงินเท่าไร?

รางวัลที่ 1 รางวัล: 6,000,000 บาท	เลขหน้า 3 ตัว 2 รางวัล: 4,000 บาท	เลขท้าย 3 ตัว 2 รางวัล: 4,000 บาท	เลขท้าย 2 ตัว 1 รางวัล: 2,000 บาท
912307	605 248	282 651	97

รางวัลข้างเคียงรางวัลที่ 1
2 รางวัล: 100,000 บาท

912306

912308

ผลสลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลที่ 2 มี 5 รางวัล: 200,000 บาท

332913 742193 832004 911667 977731

ผลสลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลที่ 3 มี 10 รางวัล: 80,000 บาท

414365 436403 494890 584375 614537

839535 843195 889390 926898 962702

ผลสลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลที่ 4 มี 50 รางวัล: 40,000 บาท

001885 072932 223805 283305 376832

524610 597914 643180 770172 967461

011056 073651 232070 297047 415234

527527 600583 682896 851269 976654

027316 150655 243453 318935 440543

535339 603395 728128 949369 980145

027506 186057 250256 321269 492891

555852 627162 737151 949864 990239

030342 203361 268571 360777 494661

584381 633893 747455 959742 998072

ผลสลากกินแบ่งรัฐบาล รางวัลที่ 5 มี 100 รางวัล: 20,000 บาท

006967 112875 190471 296880 420087

521800 588776 665241 808920 928099

008980 124179 199034 317495 433986

524441 600528 668064 817941 942459

025827 130827 201160 319308 441715

536051 605943 672393 828552 964791

050786 133714 204015 321829 461561

538755 615891 697492 839330 966551

056352 136438 208074 347125 464236

554020 616530 706752 849172 975542

062475 138561 232806 349306 472249

563941 619859 728067 889783 980256

065072 143580 253135 359058 479871

565327 630738 748315 903049 980466

100498 145754 260189 389217 488674

565693 650259 750997 910966 989557

100513 152334 281720 395811 499241

579841 653590 766658 914180 989788

108370 188608 292892 416466 513163

585418 664020 771753 916746 998846

ตัวอย่าง ซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาลหนึ่งใบ โดยเฉลี่ยจะได้เงินเท่าไร?

$$p(x) = \frac{รางวัล}{10^6}$$

X

รางวัล	จำนวน	มูลค่า (บาท)
รางวัลที่ หนึ่ง	1 รางวัล	6,000,000
รางวัลที่ สอง	5 รางวัล	200,000
รางวัลที่ สาม	10 รางวัล	80,000
รางวัลที่ สี่	50 รางวัล	40,000
รางวัลที่ ห้า	100 รางวัล	20,000
รางวัลข้างเคียงรางวัลที่หนึ่ง	2 รางวัล	100,000
รางวัลเลขหน้า 3 ตัว เสีย 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 3 ตัว เสีย 2 ครั้ง	2,000 รางวัล	4,000
รางวัลเลขท้าย 2 ตัว เสีย 1 ครั้ง	10,000 รางวัล	2,000

มูลค่า

... รางวัล

0

$$\bar{x} = \sum_i [p(x_i) x_i] = \frac{1}{10^6} [6 \times 10^6 \times 1 + 2 \times 10^5 \times 5 + 8 \times 10^4 \times 10 + 4 \times 10^4 \times 50 + 2 \times 10^4 \times 100 + 1 \times 10^5 \times 2 + 4 \times 10^3 \times 2000 \times 2 + 2000 \times 10000 + 0 \times p(0)]$$

$$\bar{x} = 48 \text{ บาท}$$

$$1 \text{ ឡត} 10^6 \text{ គ.វ} \Rightarrow \text{កម្រិតសរុបគ.វ}$$

$$\Rightarrow \text{សរុប 80 គីឡូឡាម៉ែត}$$

$$\Rightarrow \text{សរុប 48 គីឡូឡាម៉ែត}$$

$$\Rightarrow \text{សរុប 48 គីឡូឡាម៉ែត}$$

$$\Rightarrow \text{សរុប 32 គីឡូឡាម៉ែត} \quad [\text{សរុប 1 ឡត}]$$

$$\Rightarrow \text{សរុប 90 ឡត}$$

$$\Rightarrow \text{សរុប 32 គីឡូឡាម៉ែត} \times 90 \text{ ឡត} \approx 2000 \text{ គីឡូឡាម៉ែត}$$

$$\Rightarrow \text{សរុប} = 32 \text{ គីឡូឡាម៉ែត} \times 90 \times 24 \approx 50000 \text{ គីឡូឡាម៉ែត}$$

$$\begin{matrix} [\text{សរុប 1 គីឡូឡាម៉ែត}] \\ [\text{សរុប 1 គីឡូឡាម៉ែត}] \end{matrix}$$