

Random Variables (II)

Petchara Pattarakijwanich

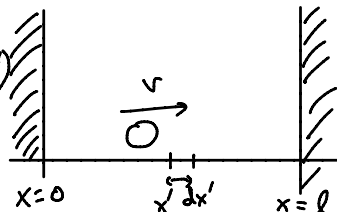
SCPY208, 15 February 2021

ตัวอย่าง อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ใน 1

มิติด้วยความเร็วคงที่ระหว่างกำแพงสองอันที่ตำแหน่ง $x = 0$ และ $x = \ell$

โดยชนอย่างยืดหยุ่นระหว่างกำแพงสองอันนี้ จงหาความน่าจะเป็น

ที่การสุ่มวัดตำแหน่งของอนุภาคนี้อาจพบอนุภาคอยู่ระหว่าง x' และ $x' + dx'$

$$\begin{aligned} P(\text{อนุภาคระหว่าง } x' \text{ กับ } x' + dx') &\propto t(x' \rightarrow x' + dx') \\ &= \frac{t(x' \rightarrow x' + dx')}{t(\text{ห้วงเวลา})} \\ &= \frac{dx'/v}{\ell/v} \end{aligned}$$


$$dP(x' \rightarrow x' + dx') = \frac{dx'}{\ell}$$

← อนุภาคพบ
Continuous Random Variable

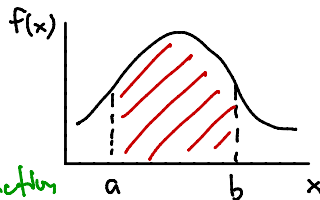
(Continuous) Random Variable

σήμανση x : Prob. η x να βρίσκεται μεταξύ x' και $x'+dx'$ είναι

$$dp(x' \rightarrow x'+dx') = f(x') dx'$$

συνολική prob. η x να βρίσκεται μεταξύ a και b

$$P(a \rightarrow b) = \int_a^b f(x') dx'$$



$f(x)$ = Probability distribution function
Probability density function

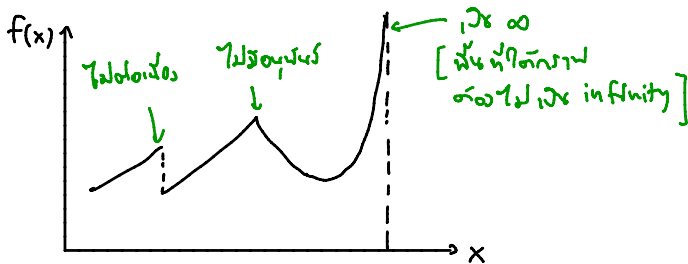
[PDF] $[f(x) \text{ συνολική πιθανότητα να είναι μεταξύ } x]$

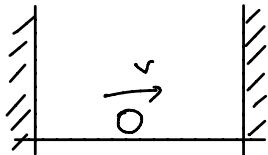
ฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x)$

① $f(x) \geq 0$ สำหรับ x ใดๆ [Prob เป็นบวก]

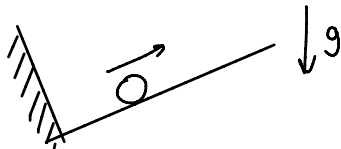
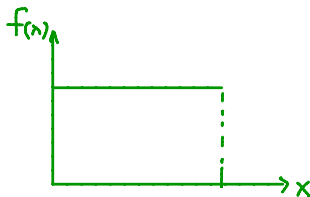
② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ [วัตถุทั้งหมดคือ 1]

③ $f(x)$ ไม่จำเป็นต้อง continuous, differentiable, finite

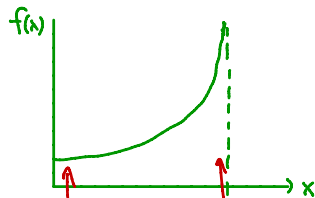




$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



אנרגיה פוטנציאלית
 סטאטוס
 $P \propto t$ גרף

סדר גודל
 אנרגיה
 $P \propto t$ חש

[finite potential]

ကျောင်းသားများက x ခုထုတ်ယူပြီး x' နှစ် $x' + dx'$ သို့ $f(x') dx'$

ကျောင်းသားများက x ခုထုတ်ယူပြီး x နှစ် $x + dx$ သို့ $f(x) dx$

↑ ↑
အသစ် x နှစ်
(ကျောင်းသား x')

x' ကို သတ်မှတ်သော dummy $\int f(x') dx'$

ตัวอย่าง Uniform Distribution (การกระจายอย่างสม่ำเสมอ) ระหว่าง $x = 0$ ถึง $x = \ell$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(x) dx = \begin{cases} k dx & , \text{ for } 0 \leq x \leq \ell \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

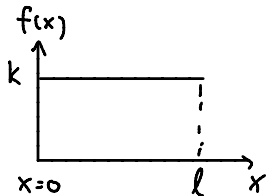
จงหา expected value และ standard deviation ของ x

ไม่ต่อเนื่อง $\Rightarrow \bar{x} = \sum x P(x) \quad , \quad \text{Var}(x) = \sum (x - \bar{x})^2 P(x)$

ต่อเนื่อง $\Rightarrow \bar{x} = \sum_{\text{all } x} x P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

$$\text{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$f(x)dx = \begin{cases} kdx & , 0 \leq x \leq l \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$



and k :

[normalization]

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

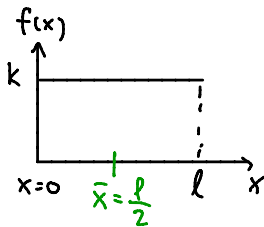
$$\int_{x=0}^l k dx = 1$$

$$k l = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{l}$$

$$\Rightarrow f(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{l} dx & , 0 \leq x \leq l \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

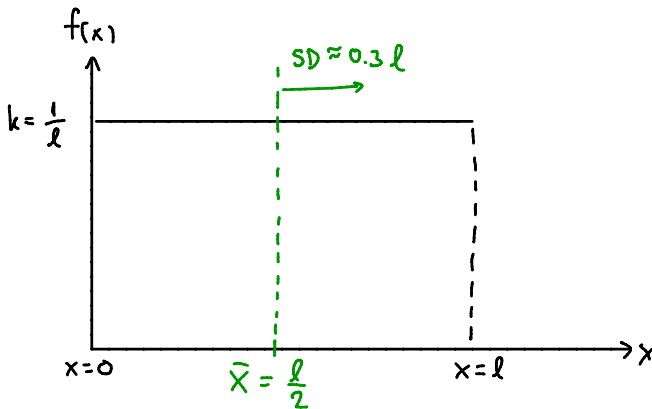
Expected value :

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_0^l x \cdot \frac{1}{l} dx \\
 &= \frac{1}{l} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^l \\
 &= \frac{l}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Variance : } \quad \text{Var}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx \\
 &= \int_0^l \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{l} dx \\
 &= \frac{1}{l} \int_{x=0}^l \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 d\left(x - \frac{l}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{l} \left. \frac{1}{3} \left(x - \frac{l}{2}\right)^3 \right|_{x=0}^l \\
 &= \frac{1}{3l} \left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\left(\frac{l}{2}\right)^3\right) \right] \\
 &= \frac{1}{3l} \left[\frac{l^3}{4} \right] = \frac{l^2}{12}
 \end{aligned}$$

$$\text{Standard deviation : } SD = \sqrt{\text{Var}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 0.29 l$$



ตัวอย่าง Probability Distribution Function ของ random variable x เขียนได้เป็น

$$f(x) dx = \begin{cases} k(1 - x^2) dx & , \text{ for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

จงหา expected value และ standard deviation ของ x

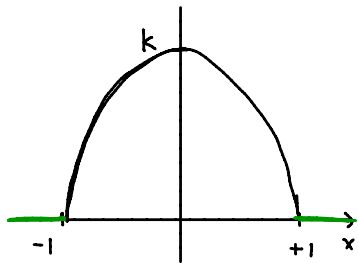
Normalize
(หาค่า k)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_{-1}^1 k(1 - x^2) dx = 1$$

$$k \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 1$$

$$k \times \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$



$$f(x) dx = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) dx & , -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

Expected value
(mean)

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2) dx$$

$$= 0 \quad [\text{Symmetry}]$$

Variance

$$SD = \sqrt{\text{variance}}$$

$$\text{Var} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1-x^2) dx$$

ตัวอย่าง Probability Distribution Function ของ random variable x เขียนได้เป็น

$$f(x) dx = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2) dx & , \text{ for } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

จงหา median, mode และ interquartile range ของ x

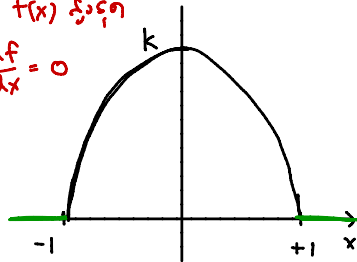
↑

$$x_{\text{med}} : P(x < x_{\text{med}}) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

ส่วนที่หน้า
 x_{med} เท่า

$x_{\text{mod}} : \text{จุดที่ } f(x) \text{ สูงสุด}$
 - หรือ $x \text{ ที่ } \frac{df}{dx} = 0$
 - เป็น mode



Percentile ที่ n $x_n : P(x < x_n) = \frac{n}{100} \Rightarrow \int_{-\infty}^{x_n} f(x) dx = \frac{n}{100}$

27 median

$$P(X < x_{\text{med}}) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{x_{\text{med}}} f(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{x_{\text{med}}} \frac{3}{4}(1-x^2) dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{x_{\text{med}}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \left[x_{\text{med}} - \frac{x_{\text{med}}^3}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{2}$$

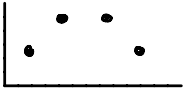
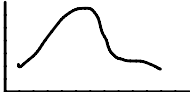
$$3x_{\text{med}} - x_{\text{med}}^3 + \cancel{2} = \cancel{2}$$

$$3x_{\text{med}} - x_{\text{med}}^3 = 0$$

$$x_{\text{med}} (3 - x_{\text{med}}^2) = 0$$

$$x_{\text{med}} = 0, \underbrace{+\sqrt{3}, -\sqrt{3}}_{\text{von } [-1, 1]}$$

ΣΣν

	Discrete Random variable	Continuous Random variable
သုည	 Prob န် $x = x'$ ခ် $f(x')$ အမှတ်ရသွား!	 Prob သွား x' ခ် $x' + dx'$ ခံ $f(x') dx'$
Prob ဂုဏ်	Prob န် x သွား $a \rightarrow b$ ခံ $\sum_{x \text{ သွား } a, b} f(x)$	Prob န် x သွား $a \rightarrow b$ ခံ $\int_a^b f(x) dx$
Expected value (mean)	$\bar{x} = \sum_{\text{အား } x} x f(x)$	$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
Variance SD = $\sqrt{\text{var}}$	$\text{Var} = \sum_{\text{အား } x} (x - \bar{x})^2 f(x)$	$\text{Var} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$

	Discrete Random variable	Continuous Random variable
median	$x \sim P(X < x_{med}) = \frac{1}{2}$	$\int_{-\infty}^{x_{med}} f(x) dx = \frac{1}{2}$
mode	$x \sim f(x) \text{ max}$	$x \sim f(x) \text{ max}$ $\frac{df}{dx} = 0$
• • •		