

Discrete } Random variables
Continuous }

Binomial } Discrete
Poisson }
Normal Distribution } continuous

Binomial Distribution

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 22 February 2021

Discrete $\rightarrow$ Γαλοισίδας, Πυρῆς

Discrete $\rightarrow$ $\pi u, \alpha n \theta a$

ตัวอย่าง มีคน 5 คน ต้องการจัดแถวที่ยาว 3 คน สามารถจัดได้กี่วิธี?

$$N = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

← 5 คน 5 แบบ
← 4 คน 4 แบบ
← 3 คน 3 แบบ

$$= 5 \times 4 \times 3 \times \frac{2 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5!}{(5-3)!}$$

$$[n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1]$$

$$[0! = 1]$$

$$\left[\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \right]$$

ตัวอย่าง มีคน n คน ต้องการจัดแถวที่ยาว r คน สามารถจัดได้กี่วิธี?

$$N = \frac{n!}{(n-r)!}$$



Permutation

$${}^n P_r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง มีคน 5 คน ต้องการตั้งกลุ่มที่มีคน 3 คน สามารถตั้งกลุ่มได้กี่วิธี

$P(5,3)$? ไม่ใช่ เพราะ

ABC, ACB, BAC

BCA, CAB, CBA

6 วิธี = กลุ่มเดียวกัน

$$\left(\# \text{ วิธี } \text{จัด} \text{แล้ว} 3 \text{ คน จาก } 5 \text{ คน} \right) = \left(\# \text{ วิธี } \text{เลือก} \text{กลุ่ม} 3 \text{ คน จาก } 5 \text{ คน} \right) \times \left(\# \text{ วิธี } \text{จัด} \text{แล้ว} 3 \text{ คน ที่เลือกมา} \right)$$

$$P(5,3) = C(5,3) P(3,3)$$

...

จัดแล้ว ...

↑
จัดแล้ว

$$P(5,3) = C(5,3) P(3,3)$$

$$\frac{5!}{(5-3)!} = C(5,3) \frac{3!}{(3-3)!} \quad \} = 0! = 1$$

$$C(5,3) = \frac{5!}{(5-3)! 3!} = 10$$

$\uparrow$
 $P(5,3)$
 $\uparrow$
 $P(3,3)$

ตัวอย่าง มีคน n คน ต้องการตั้งกลุ่มที่มีคน r คน สามารถตั้งกลุ่มได้กี่วิธี

$$N = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

↑
Combination

$${}^nC_r = C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$\left[C(n, r) = C(n, n-r) \quad \begin{array}{l} \text{เลือกคน } r \text{ คน} \\ = \text{เลือกคน } n-r \text{ คน} \end{array} \right]$$

Permutation and Combination

Permutation n ຕົວ ເລືອກ r ເປັນລຳດັບ (ຈັດຮັບຮຽດຮຽງ)

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Combination n ຕົວ ເລືອກ r ຫົວໜ່ວຍ (ຈັດຮັບໃນຮຽດຮຽງ)

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ตัวอย่าง เหรียญที่ถูกถ่วงให้มีความน่าจะเป็นที่จะออกหัว p
(และความน่าจะเป็นที่จะออกก้อย $1 - p$) ถูกโยน 10 ครั้ง
จงหาความน่าจะเป็นที่จะออกหัว 4 ครั้ง

$$2^{10} \approx 10^3$$

วิธี 1 Sample space ทั้งหมด

2^{10} ความน่าจะเป็น

hhhhhhhhhh , hhhhhhhhhht , ... , tttttttttt

p^{10}

$p^9(1-p)$

$(1-p)^{10}$

$$P(4 \text{ หัว}) = \sum (\text{ความน่าจะเป็นของทุกผลลัพธ์ 4 หัว})$$

$$1 \text{ นกหมี 4 ตัว มี prob} = p^4 (1-p)^6$$

↗ ↖
ตัว 4 หัว 6

$$\begin{aligned} \text{prob มี 4 ตัว} &= (\# \text{ วิธี มี 4 ตัว}) \times (\text{prob ของ 1 ตัว มี 4 ตัว}) \\ &= (\# \text{ วิธี มี 4 ตัว}) \times p^4 (1-p)^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \# \text{ วิธี มี 4 ตัว} &= \text{มี 10 สัตว์เลี้ยง เลือก 4 สัตว์เลี้ยงมา 4 ตัว} \\ &= C(10, 4) \end{aligned}$$

$$P(4 \text{ ตัว}) = C(10, 4) p^4 (1-p)^6$$

Bernoulli Trial & Binomial Distribution

Bernoulli Trial : Outcome มี 2 อย่าง

↑
or "success"

- "success" prob. p

- "failure" prob. $1-p = q$

Binomial Distribution : ถ้า Bernoulli trial ทำซ้ำ n ครั้ง

(แต่ละครั้ง independent กัน) ความน่าจะเป็นที่จะ success x ครั้ง คือ

$$f(x) = C(n, x) p^x (1-p)^{n-x}$$

คุณสมบัติของ Binomial Distribution

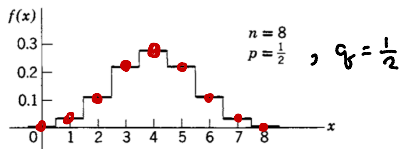
Mean $\bar{x} = np$

Variance $\text{Var}(x) = npq = np(1-p)$

SD. $SD = \sqrt{\text{var}} = \sqrt{np(1-p)}$

Median $\approx np$

Mode $\approx np$



- Discrete
- $p = \frac{1}{2}$ fair coin
- discrete
- $x = 0 \rightarrow x = n$

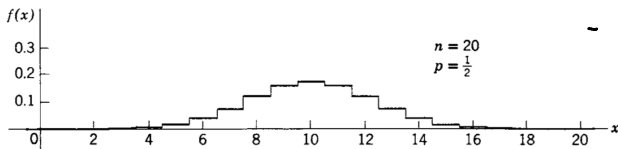
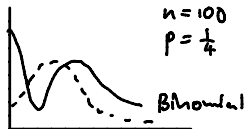
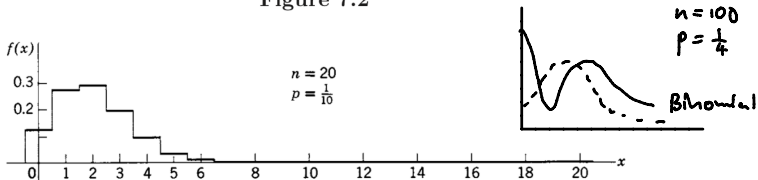


Figure 7.2



ตัวอย่าง โรงงานผลิตกระเป๋ามีความน่าจะเป็นที่จะผลิตกระเป๋ามีตำหนิเป็น 0.001
ต่อกระเป๋านึ่งใบที่ผลิต กระเป๋าล็อตหนึ่งมี 100 ใบ
จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีกระเป๋ามากกว่า 1 ใบในล็อตนี้ที่มีตำหนิ

$$\text{success} = \text{จำนวน} \quad p = 0.001$$

$$\text{failure} = \text{ไม่ตำหนิ} \quad q = 0.999$$

$$f(x) = C(100, x) (0.001)^x (0.999)^{100-x}$$

$$P(x > 1) = f(2) + f(3) + \dots + f(100)$$

$$= 1 - (f(0) + f(1)) \quad C(100, 0) = 1$$

$$= 1 - C(100, 0) (0.001)^0 (0.999)^{100} - C(100, 1) (0.001)^1 (0.999)^{99} \quad C(100, 1) = 100$$

$$P(X > 1) = 1 - (0.999)^{100} - 100 \times (0.001) \times (0.999)^{99}$$

$$\approx 4.6 \times 10^{-3}$$

ตัวอย่าง นักแม่นปืนคนหนึ่งมีโอกาสยิงปืนเข้าเป้าเป็น 0.8 ต่อหนึ่งนัด เขายิงปืนไป 20 นัด จงหาความน่าจะเป็นที่จะเข้าเป้า 18 นัดขึ้นไป

ตัวอย่าง คนเมาเดินแบบ random walk ในหนึ่งมิติ
โดยแต่ละก้าวที่เดินมีความน่าจะเป็นที่จะไปข้างหน้ากับข้างหลังเท่าๆ กัน เขาเดินไป
15 ก้าว จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นไปเป็นระยะ 5 ก้าว

ตัวอย่าง ข้อสอบปลายภาควิชาหนึ่งเป็น multiple choice 20 ข้อ แต่ละข้อมี 4 ตัวเลือก นักเรียนคนหนึ่งไม่ได้อ่านหนังสือจึงเข้าไปกาแล้ว จงหา

- ① ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะโชคดีว่า ได้น้อยกว่า 2 คะแนน
- ② โดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนคนนี้จะทำถูกกี่ข้อ และจำนวนข้อที่ถูกนี้มี standard deviation เท่าไหร่

$$20 \text{ ข้อ} \quad p = \frac{1}{4} \Rightarrow P(0 \text{ คะแนน}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \approx 3 \times 10^{-3}$$

$$100 \text{ ข้อ} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{100} \approx 3 \times 10^{-13}$$