

Poisson Distribution

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 1 March 2021

ตัวอย่าง นักแม่นปืนคนหนึ่งมีโอกาสยิงปืนเข้าเป้าเป็น 0.8 ต่อหนึ่งนัด เขายิงปืนไป 20 นัด จงหาความน่าจะเป็นที่จะเข้าเป้า 18 นัดขึ้นไป

ทฤษฎี Binomial : success p
 failure $1-p$

ถ้า n นัด $\Rightarrow$ prob ความสำเร็จ success x นัด ใดๆ

$$p(x) = C(n, x) p^x (1-p)^{n-x}$$

success = เข้าเป้า $p = 0.8$, จง $n = 20$ นัด

$$P(x \geq 18) = P(18) + P(19) + P(20)$$

$$(A+B)^n = A^n + \dots + \dots + B^n$$

Binomial coefficient

ตัวอย่าง คนเมาเดินแบบ random walk ในหนึ่งมิติ

โดยแต่ละก้าวที่เดินมีความน่าจะเป็นที่จะไปข้างหน้ากับข้างหลังเท่าๆ กัน เขาเดินไป 15 ก้าว จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นไปเป็นระยะ 5 ก้าว

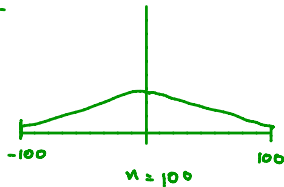
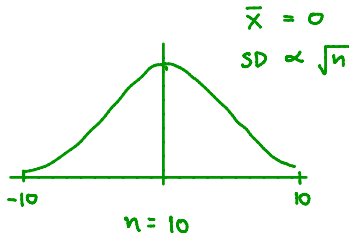
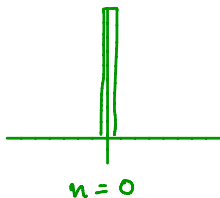
success = เดินหน้า $p = 0.5$

failure = ถอยหลัง $1-p = 0.5$

$$P(\text{ห่างไป 5}) = P(5) + P(10)$$

↑
หน้า 10 ก้าว + หน้า 5 ถอย
หน้า 5 ก้าว + หน้า 10 ถอย

Random vs time



ตัวอย่าง ข้อสอบปลายภาควิชาหนึ่งเป็น multiple choice 20 ข้อ แต่ละข้อมี 4 ตัวเลือก นักเรียนคนหนึ่งไม่ได้อ่านหนังสือจึงเข้าไปกาแล้ว จงหา

- 1 ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะโชคดีว่า ได้น้อยกว่า 2 คะแนน
- 2 โดยเฉลี่ยแล้วนักเรียนคนนี้จะทำถูกกี่ข้อ และจำนวนข้อที่ถูกนี้มี standard deviation เท่าไหร่

$$\text{success} = \text{ถูก} \quad p = \frac{1}{4} \quad n = 20 \quad \text{ข้อ}$$

$$\text{failure} = \text{ผิด} \quad 1-p = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} P(0 \text{ หรือ } 1) &= P(0) + P(1) \\ &= C(20,0) \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{20} + C(20,1) \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{19} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{20} + 20 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{19} \\ &= 0.003 + 0.021 \end{aligned}$$

$$\text{mean} = np = 20 \times \frac{1}{4} = 5$$

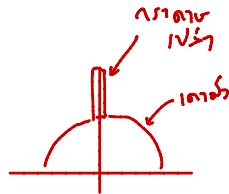
$$\text{Var} = np(1-p)$$

$$\Rightarrow \text{SD} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} = 1.94$$

ข้อสอบ GRE 2 ข้อ

5 ข้อ ข้อ 1

- สอบข้อ 1 +1 คะแนน
- สอบข้อ 2 - $\frac{1}{4}$ คะแนน



Poisson Distribution

Poisson Distribution อธิบายความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ (event) จำนวน n ครั้งในช่วงเวลาหนึ่งๆ โดยที่เหตุการณ์นั้นต้องมีเงื่อนไขดังนี้ **ข้อ 1, 2, 3**

- มีอัตราการเกิดเฉลี่ยต่อช่วงเวลานั้นเป็นค่าคงที่ (λ) **← 3 อนุภาค/วินาที**
- การเกิดแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน **← ข้อ 1, 2, 3, 4, 5**
(ครั้งถัดไปเกิดเมื่อไหร่ไม่ขึ้นกับเวลาที่เกิดครั้งก่อนหน้า)

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ขึ้น n ครั้งในช่วงเวลาหนึ่ง (โดยจำนวนเหตุการณ์เฉลี่ยในช่วงเวลานั้นเป็น λ) คือ

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

ตัวอย่าง แหล่งกำเนิดรังสีปล่อยรังสีแอลฟาด้วยอัตรา 3 อนุภาคต่อวินาที
 ถ้าเอาเครื่องวัดอนุภาคไปวัดโดยเปิดเครื่องไว้เป็นเวลา 1 วินาที
 จงหาความน่าจะเป็นที่

$$\lambda = 3 \text{ อนุภาค}$$

- วัดได้ 0 อนุภาค
- วัดได้ 1 อนุภาค
- วัดได้ 2 อนุภาค
- วัดได้ 3 อนุภาค
- วัดได้ 4 อนุภาค
- วัดได้มากกว่า 4 อนุภาค

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

n! ไม่พ่วง
 $P(n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

$$P(0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = e^{-3} =$$

$$P(1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 3e^{-3} =$$

$$P(2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9}{2} e^{-3} =$$

$$P(3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = \frac{9}{2} e^{-3} =$$

$$P(4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = \frac{27}{8} e^{-3} =$$

$$P(x > 4) = P(5) + P(6) + \dots$$

$$= 1 - (P(0) + P(1) + \dots + P(4))$$

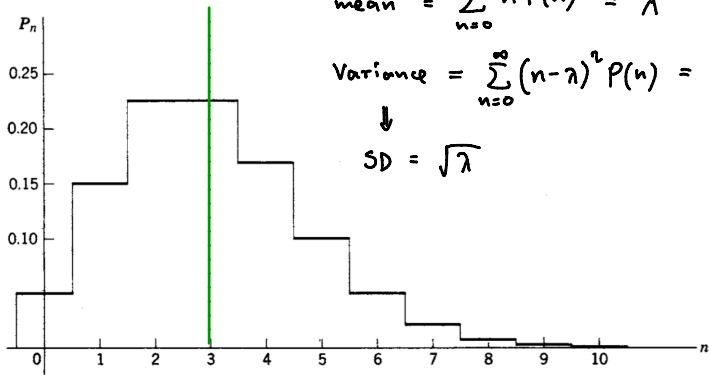


Figure 9.1 Poisson distribution $\lambda=3$.

Poisson distribution duration $n=0 \rightarrow n=\infty$

ตัวอย่าง แหล่งกำเนิดรังสีปล่อยรังสีแอลฟาด้วยอัตรา 3 อนุภาคต่อวินาที
ถ้าเอาเครื่องวัดอนุภาคไปวัดโดยเปิดเครื่องไว้เป็นเวลา 10 วินาที

จงหาความน่าจะเป็นที่

- วัดได้ 0 อนุภาค
- วัดได้ 30 อนุภาค
- วัดได้ 50 อนุภาค
- วัดได้ระหว่าง 25-35 อนุภาค
- วัดได้มากกว่า 50 อนุภาค

$$\lambda = 3 \text{ อนุภาค/วินาที} \times 10 \text{ วินาที}$$

$$\lambda = 30 \text{ อนุภาค}$$

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$P(0) = \frac{30^0 e^{-30}}{0!} = e^{-30}$$

$$P(30) = \frac{30^{30} e^{-30}}{30!} = 0.07$$

$$P(50) = \frac{30^{50} e^{-30}}{50!} = 0.0002$$



$$P(25 \leq n \leq 35) = P(25) + \dots + P(35)$$

[1 ข้อ]

$$P(n > 50) = P(51) + \dots$$

$$= 1 - (P(0) + \dots + P(50))$$

คุณสมบัติของ Poisson Distribution

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$\text{mean} = \lambda$$

$$\text{var} = \lambda$$

$$\text{SD} = \sqrt{\lambda}$$

ตัวอย่าง หนังสือของสำนักพิมพ์หนึ่งปกติดจะมีอัตราการพิมพ์ผิดโดยเฉลี่ย 10 หน้า 1 จุด เราหยิบหนังสือของสำนักพิมพ์นี้ขึ้นมาอ่านหนึ่งหน้า

จงหาความน่าจะเป็นที่หน้านี้จะ

- ไม่มีจุดพิมพ์ผิดเลย
- มีพิมพ์ผิด 1 จุด
- มีพิมพ์ผิดมากกว่า 1 จุด

$$\lambda = \frac{10 \text{ จุด}}{10 \text{ หน้า}} \times 1 \text{ หน้า} = 0.1 \text{ จุด}$$

$$P(n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$$

$$P(0) = \frac{0.1^0 e^{-0.1}}{0!} = e^{-0.1} = 0.9$$

$$P(1) = \frac{0.1 \times e^{-0.1}}{1!} = 0.1 \times e^{-0.1} = 0.09$$

$$P(\geq 2) = 1 - (0.9 + 0.09) = 0.01$$

ตัวอย่าง ใช้เครื่องวัดรังสีไปวัดรังสีแอลฟาจากแหล่งกำเนิดหนึ่ง เปิดเครื่องวัดไว้ 1 วินาที วัดอนุภาคได้ 400 อนุภาค
ควรจะรายงานว่าอัตราการปล่อยรังสีของแหล่งกำเนิดนี้เป็นเท่าไร
และมีความคลาดเคลื่อนเท่าไร

$$\text{วัด 1 ครั้ง ได้ 400 อนุภาค} \rightarrow \lambda = 400 \text{ อนุภาค}$$

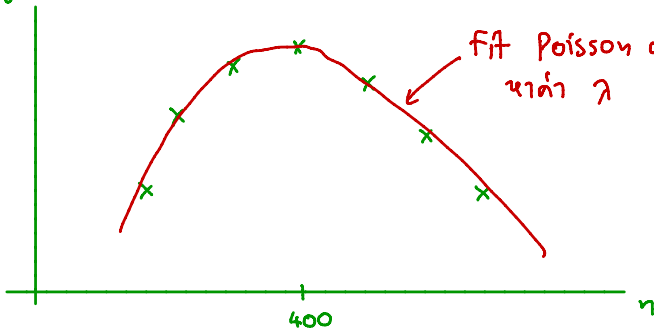
↑
เราได้ค่านี้มาตรงกับ λ วัด 1 ครั้ง

$$\text{ความคลาดเคลื่อน} \quad \Delta\lambda = SD = \sqrt{\lambda} = \sqrt{400} = 20$$

$$\Rightarrow \text{อัตราเฉลี่ยรังสี} \quad 400 \pm 20 \quad \frac{\text{อนุภาค}}{\text{วินาที}}$$

ที่วาดได้แบบนี้ $\rightarrow$ วัด 1 วันก็ แบบนี้ $\rightarrow$ histogram
เอาค่า มาใส่แบบนี้

จำนวน



Errors and SNR

$$\sigma_{\lambda} \approx \lambda \Rightarrow \Delta\lambda = SD = \sqrt{\lambda}$$

- Absolute Error : $\Delta\lambda = \sqrt{\lambda}$
(ค่าผิดพลาด)
- Relative Error : $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
(ค่าผิดพลาด)
[บอกเป็น %.]

$\Rightarrow$ ยิ่ง λ มาก $\rightarrow$ Absolute Error ยิ่ง
Relative Error น้อย

- Signal-to-Noise Ratio : $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}$

Errors and SNR

$$\textcircled{1} \quad \lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

$$\text{SNR} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\textcircled{2} \quad \lambda = 400 \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda = \sqrt{400} = 20$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{20}{400} = 0.05 = 5\%$$

$$\text{SNR} = \frac{400}{20} = 20$$

Probability vs Statistics

Probability

- รู้ว่า λ เป็นยังไง
- หา prob ที่สนใจ n ครั้ง

[รู้ underlying distribution]

Statistics

- จัดข้อมูลให้เป็นระเบียบ
- หา λ ของเป็นยังไง

