

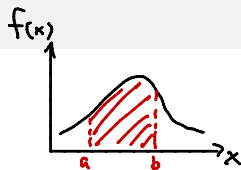
Random Variable (III)

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 2 April 2021

บทบทวน Random Variable 1 ตัวแปร

Continuous



- Probability Distribution Function $f(x)$
- Prob. ที่จุดค่า x ระหว่าง x' กับ $x' + dx'$ $dP = f(x') dx'$
- Prob. ที่ค่า x ระหว่าง a, b $P(a < x < b) = \int_a^b f(x') dx'$
- เงื่อนไขของ $f(x) \rightarrow f(x) \geq 0$ ที่ทุก x [prob ≥ 0]
 $\searrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' = 1$ [รวม 1 ของทุกอย่างทั้งหมด]
- Expected value (mean) $E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x' f(x') dx'$
- Variance (SD^2) $Var(x) = E((x - E(x))^2) = \int (x' - \mu)^2 f(x') dx'$
- Median / mode / skewness / kurtosis [PDF มีทั้ง 4 อย่าง]

ตัวอย่าง Random variable x มีค่า expected value เป็น μ และ variance เป็น σ^2 จงหา expected value และ variance ของ $ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่

วิธีแก้

$$\begin{aligned} E(ax+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x) dx \\ &= a \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{=\mu} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{=1} \\ &= a\mu + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(ax+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} [(ax+b) - E(ax+b)]^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [(ax+b) - (a\mu+b)]^2 f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [a(x-\mu)]^2 f(x) dx \\
 &= a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(x-\mu)^2 f(x) dx}_{= \text{Var}(x) = \sigma^2} \\
 \text{Var}(ax+b) &= a^2 \sigma^2
 \end{aligned}$$

- mean/variance สำหรับ $f(x)$ คือ μ, σ^2

สูตร

$$\begin{aligned}E(ax+b) &= E(ax) + E(b) \\&= a E(x) + E(b) \\&= a\mu + b\end{aligned}$$

} $E(\dots)$
is linear
operator

$$\begin{aligned}\text{Var}(ax+b) &= E\left(\left[(ax+b) - E(ax+b)\right]^2\right) \\&= E\left(\left(ax+b - a\mu - b\right)^2\right) \\&= E\left((ax - a\mu)^2\right) \\&= E\left(a^2(x - \mu)^2\right) \\&= a^2 E\left((x - \mu)^2\right) \\&= a^2 \text{Var}(x) = a^2 \sigma^2\end{aligned}$$

สรุป

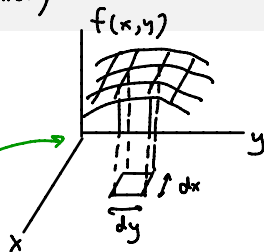
$$E(ax+b) = a\mu + b$$

$$\text{Var}(ax+b) = a^2 \sigma^2$$

Random Variable 2 ตัวแปร (พหุคูณ 2 ตัวแปร)

Prob. ที่ x มีค่าระหว่าง $x' \rightarrow x' + dx'$
 y มีค่าระหว่าง $y' \rightarrow y' + dy'$

$$d^2P = f(x', y') dx' dy' \quad \text{[ปริมาตร]} \quad \rightarrow$$



Prob. ที่ x มีค่าระหว่าง a, b y ระหว่าง c, d

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_{y=c}^d \int_{x=a}^b f(x', y') dx' dy'$$

เนื่องจาก $f(x, y) \rightarrow \text{Prob} \geq 0 \rightarrow f(x, y) \geq 0$ ทุก x, y

$\rightarrow$ Normalization $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Expected value

$$E(x) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy$$

$$E(y) = \mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy$$

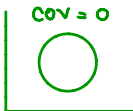
Variance

Variance {

$$\text{Var}(x) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x,y) dx dy = E((x - \mu_x)^2)$$
$$\text{Var}(y) = \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 f(x,y) dx dy = E((y - \mu_y)^2)$$

Covariance $\rightarrow$

$$\text{Cov}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) f(x,y) dx dy = E((x - \mu_x)(y - \mu_y))$$



ตัวอย่าง ตัวแปรสุ่ม x, y มีค่า expected value, variance, covariance ที่รู้ค่า จงหา expected value และ variance ของ $ax + by + c$ โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงที่

$$\begin{aligned} E(ax + by + c) &= aE(x) + bE(y) + E(c) \\ &= a\mu_x + b\mu_y + c \end{aligned}$$

$$E(ax+by+c)$$

$$\text{Var}(ax+by+c) = E\left(\left[ax+by+c - \overbrace{a\mu_x + b\mu_y + c}^{E(ax+by+c)}\right]^2\right)$$

$$= E\left(\left[a(x-\mu_x) + b(y-\mu_y)\right]^2\right)$$

$$= E\left(a^2(x-\mu_x)^2 + b^2(y-\mu_y)^2 + 2ab(x-\mu_x)(y-\mu_y)\right)$$

$$= a^2 E((x-\mu_x)^2) + b^2 E((y-\mu_y)^2) + 2ab E((x-\mu_x)(y-\mu_y))$$

$$\text{Var}(ax+by+c) = a^2 \text{Var}(x) + b^2 \text{Var}(y) + 2ab \text{Cov}(x,y)$$

Independent Random Variables

x, y independent $\Rightarrow$ knowing x tells us prob of y

$$f(x, y) = g(x) h(y)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) & \Rightarrow & P(A|B) = P(A) \\ &= P(B|A)P(A) & \text{Independent} & P(B|A) = P(B) \\ & & & \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

what about x, y independent

- $\text{Cov}(x, y) = 0$

- $E(ax + by + c) = a\mu_x + b\mu_y + c \Rightarrow E(x + y) = \mu_x + \mu_y$

- $\text{Var}(ax + by + c) = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 \Rightarrow \text{Var}(x + y) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

ตัวอย่าง ตัวแปรสุ่ม x, y เป็น independent random variables จงหา expected value ของ xy

$$\begin{aligned} E(xy) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x) h(y) dx dy \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx}_{E(x) = \mu_x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy}_{E(y) = \mu_y} \end{aligned}$$

$$E(xy) = \mu_x \mu_y$$

ตัวอย่าง ตัวแปรสุ่ม x, y เป็น independent random variables จงหา covariance $\text{Cov}(x, y)$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x, y) &= E((x - \mu_x)(y - \mu_y)) \\&= E(xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y) \\&= \underbrace{E(xy)}_{\mu_x\mu_y} - \mu_y \overset{\uparrow}{\underbrace{E(x)}_{\mu_x}} - \mu_x \overset{\uparrow}{\underbrace{E(y)}_{\mu_y}} + \mu_x\mu_y\end{aligned}$$

$$\text{Cov}(x, y) = 0$$

ตัวอย่าง ตัวแปรสุ่ม x, y เป็น independent random variables จงหา expected value และ variance ของ $x + y$

ถ้า independent

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) + 2\text{Cov}(x,y)$$

↓ independent $\text{Cov}(x,y) = 0$

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$\text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y)$$

E, Var ของ $x+y$ = $x+y$ ของ E, Var

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า binomial distribution ที่มีจำนวน trial n และความน่าจะเป็นต่อหนึ่งครั้ง p มี expected value เป็น np และ variance เป็น $np(1-p)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{trial } n \text{ ครั้ง} \\ \text{success } p \end{array} \right\} f(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

หาค่า

$$\mu = \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n (x-\mu)^2 \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

ไม่ได้จบไว้

§3 Independent Random Variable

X = จำนวน success เมื่อโยน n ครั้ง

X_1 = จำนวน success เมื่อโยนครั้งที่ 1

X_2 = จำนวน success เมื่อโยนครั้งที่ 2

$\vdots$

X_n = จำนวน success เมื่อโยนครั้งที่ n

$X_1, \dots, X_n$

- มีค่าได้

0 ($1-p$)

1 (p)

- ทราบถึง E , Var ได้

- Independent กัน

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

$$= n E(X_1) \quad [E(X_i) \text{ เหมือนกัน}]$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

$$= n \text{Var}(X_1) \quad [\text{Var}(X_i) \text{ เหมือนกัน}]$$

we $E(x_1)$ and $var(x_1)$

$$x_1 = \begin{cases} 0 & \text{with probability } 1-p \\ 1 & \text{with probability } p \end{cases}$$

$$E(x_1) = \sum x p(x) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

$$\begin{aligned} var(x_1) &= \sum (x - \mu)^2 p(x) = (1-p)^2 \times p + (0-p)^2 \times (1-p) \\ &= (1-p)p [1-p + p] \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

$$E(x) = n E(x_1) = np$$

$$\text{Var}(x) = n \text{Var}(x_1) = np(1-p)$$