Error Propagation

Petchara Pattarakijwanich

SCPY208, 19 April 2021

สรุป Independent Random Variable

Random variable x, y (independent)

$$z = ax + by + c \quad , \quad a,b,c \text{ ค่าคงที่}$$

↑ Random variable

$$E(z) = aE(x) + bE(y) + c \Rightarrow \boxed{\mu_z = a\mu_x + b\mu_y + c}$$

$$Var(z) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) \Rightarrow \boxed{\sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2}$$

สรุป Sample Mean & Sample Variance

Population mean/variance μ , σ^2

μ ค่าคงที่ แต่เราไม่รู้

Sample mean/variance $\bar{x}$, s^2

หาได้จาก $x_1, \ldots, x_n$ ที่เรามี

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\right]$$

เป็น unbiased estimator ของ μ, σ^2

$E(\bar{x}) = \mu$

$E(s^2) = \sigma^2$

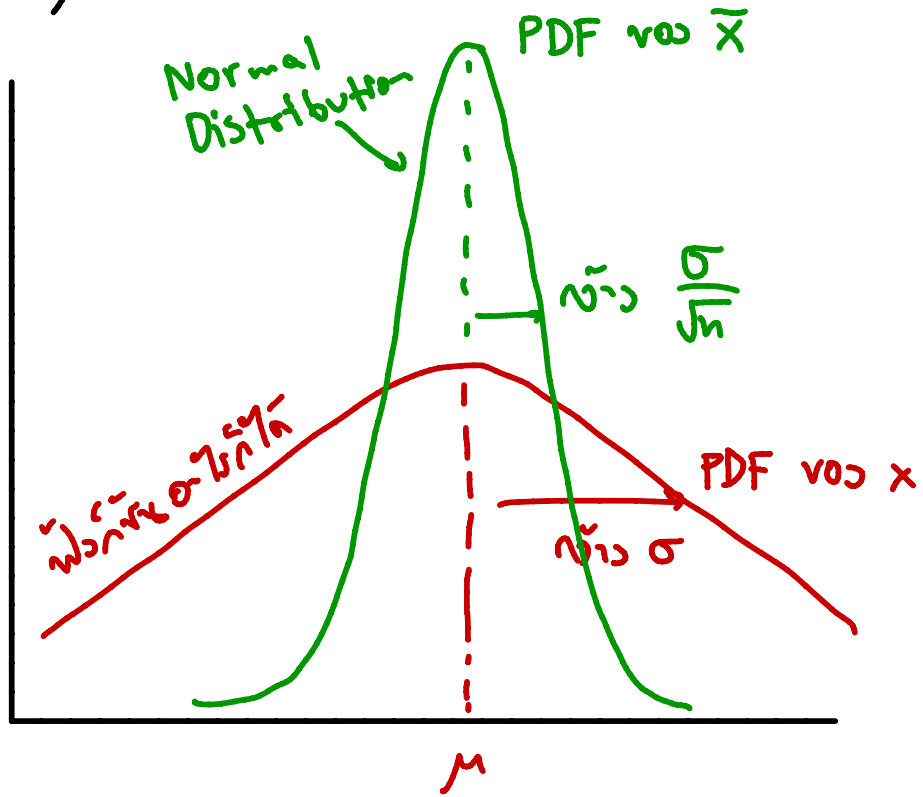
สรุป Variance of the Mean

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$$

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$\text{Var}(\bar{x}) = \sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$



ตัวอย่าง วัดค่าความต้านทานของลวดสิบครั้งด้วยมัลติมิเตอร์ ได้ค่าดังนี้

$$7.2, 7.1, 6.7, 7.0, 6.8, 7.0, 6.9, 7.4, 7.0, 6.9$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_{10}$

ควรจะรายงานค่าและความคลาดเคลื่อนอย่างไร

ค่าที่รายงาน $\bar{x} = \frac{1}{10}(7.2 + 7.1 + \cdots + 6.9) = 7.0$

Sample variance $s^2 = \frac{1}{10-1}\left[(7.2-7)^2 + \cdots + (6.9-7)^2\right] = 0.04$

$\left[s = \sqrt{0.04} = 0.2 \Rightarrow \text{ใน 1 ครั้ง ความคลาดเคลื่อน} \approx 0.2 \right]$

Variance of mean $\sigma_m^2 = \frac{s^2}{n} = \frac{0.04}{10} = 0.004$

$\left[\sigma_m = \sqrt{0.004} = 0.063 \Rightarrow \text{ความคลาดเคลื่อนของ } \bar{x} \approx 0.06 \right]$

รายงาน x ดัง $x = \bar{x} \pm \sigma_m = 7.00 \pm 0.06$

ตัวอย่าง วัดค่าตัวแปรสุ่ม x และ y มาหลายๆ ครั้ง
และคำนวณค่าเฉลี่ยและความคลาดเคลื่อนได้เป็น $\bar{x} \pm \sigma_{mx}$ และ $\bar{y} \pm \sigma_{my}$
กำหนดให้ $w = x + y$ จงหาค่า $\bar{w}$ และ σ_{mw}

$\sigma_{mx} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ $\sigma_{my} = \frac{s_y}{\sqrt{n}}$

Random Variable → $w = x + y$

หาค่า $E(w)$ กับ $Var(w)$

$$E(w) = E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$$\boxed{\bar{w} = \bar{x} + \bar{y}}$$

$$Var(w) = Var(x+y) = Var(x) + Var(y)$$

$$\sigma_{mw}^2 = \sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2$$

$$\boxed{\sigma_{mw} = \sqrt{\sigma_{mx}^2 + \sigma_{my}^2}}$$

ตัวอย่าง วัดค่าตัวแปรสุ่ม x และ y มาหลายๆ ครั้ง
และคำนวณค่าเฉลี่ยและความคลาดเคลื่อนได้เป็น $\bar{x} \pm \sigma_{mx}$ และ $\bar{y} \pm \sigma_{my}$
กำหนดให้ $w = 2x + 3y + 4$ จงหาค่า $\bar{w}$ และ σ_{mw}

$$w = 2x + 3y + 4$$

$$E(w) = 2E(x) + 3E(y) + 4$$

$$\boxed{\bar{w} = 2\bar{x} + 3\bar{y} + 4}$$

$$Var(w) = 2^2 Var(x) + 3^2 Var(y)$$

$$\sigma_{mw}^2 = 4\sigma_{mx}^2 + 9\sigma_{my}^2$$

$$\boxed{\sigma_{mw} = \sqrt{4\sigma_{mx}^2 + 9\sigma_{my}^2}}$$

ตัวอย่าง วัดค่าตัวแปรสุ่ม x และ y มาหลายๆ ครั้ง
และคำนวณค่าเฉลี่ยและความคลาดเคลื่อนได้เป็น $\bar{x} \pm \sigma_{mx}$ และ $\bar{y} \pm \sigma_{my}$
กำหนดให้ $w = w(x, y)$ (เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ x, y) จงหาค่า $\bar{w}$ และ σ_{mw}
(ให้สมมติว่าการวัดค่า x และ y มีความแม่นยำพอสมควร)

กระจาย $w(x,y)$ รอบจุด $(\bar{x},\bar{y})$ ด้วย Taylor Expansion

$$w(x,y) = w(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial w}{\partial x}(x-\bar{x}) + \frac{\partial w}{\partial y}(y-\bar{y}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x-\bar{x})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(y-\bar{y})^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + \cdots$$

[derivative ทั้งหมด $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots$ Evaluate ที่ $(\bar{x},\bar{y})$
$\Rightarrow$ $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots$ เป็นค่าคงที่]

[อัตแม่นยำของผลวัด $\Rightarrow$ $x-\bar{x}$, $y-\bar{y}$ มีค่าน้อย $\Rightarrow$ ตัด order สูงๆ ทิ้ง]

$$\Rightarrow \quad w(x,y) \approx w(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial w}{\partial x}(x-\bar{x}) + \frac{\partial w}{\partial y}(y-\bar{y})$$

$$w(x,y) \approx w(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial w}{\partial x}(x-\bar{x}) + \frac{\partial w}{\partial y}(y-\bar{y})$$

$$E(w(x,y)) = w(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial w}{\partial x}\underbrace{E(x-\bar{x})}_{=0} + \frac{\partial w}{\partial y}\underbrace{E(y-\bar{y})}_{=0}$$

$$E(w) = w(\bar{x},\bar{y})$$

$$\boxed{\bar{w} = w(\bar{x},\bar{y})}$$

$$w(x,y) \approx w(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial w}{\partial x}(x-\bar{x}) + \frac{\partial w}{\partial y}(y-\bar{y})$$

$$\mathrm{Var}(ax+by+c) = a^2\,\mathrm{Var}(x) + b^2\,\mathrm{Var}(y)$$

$$\mathrm{Var}(w(x,y)) = \mathrm{Var}\left[\underbrace{w(\bar{x},\bar{y}) - \frac{\partial w}{\partial x}\bar{x} - \frac{\partial w}{\partial y}\bar{y}}_{c} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{a}x + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{b}y\right]$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \mathrm{Var}(x) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \mathrm{Var}(y)$$

$$\sigma_{mw}^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_{mx}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_{my}^2$$

$$\boxed{\sigma_{mw} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_{mx}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_{my}^2}}$$

ตัวอย่าง $w = x + y$

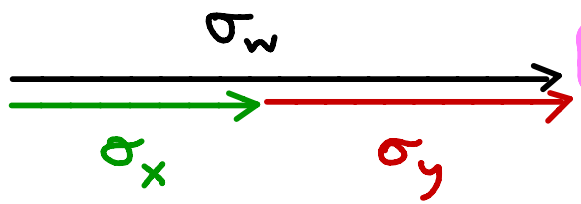
วิธีทางฯ $w = x + y$

วิธีทางฯ

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

$$\Delta w = \Delta x + \Delta y$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_w = \sigma_x + \sigma_y$$



x, y ไม่ independent

ถ้า $y = x \Rightarrow w = x + x = 2x$

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_x^2} = \sqrt{2\sigma_x^2} = \sqrt{2}\,\sigma_x$$

?!?

x กับ x ไม่ independent

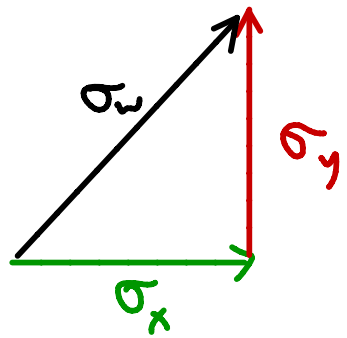
$w = 2x$

$\mathrm{Var}(w) = 4\,\mathrm{Var}(x)$

?!?

$\sigma_w^2 = 4\sigma_x^2$

$\sigma_w = 2\sigma_x$



x, y independent $\Rightarrow$ Error มากขึ้น

ตัวอย่าง วัดค่าความต้านทานของลวดสิบครั้งด้วยมัลติมิเตอร์ ได้ค่าดังนี้

$$7.2, 7.1, 6.7, 7.0, 6.8, 7.0, 6.9, 7.4, 7.0, 6.9$$

ควรจะรายงานค่าและความคลาดเคลื่อนอย่างไร

$\bar{x} = 7.0$

$\sigma_{mx} = 0.063$

} เลขนัยสำคัญ ?

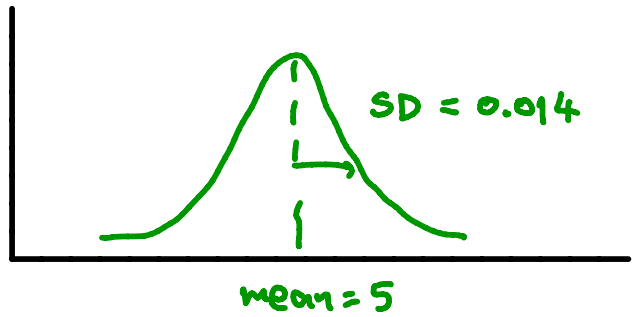
$x = 7.00 \pm 0.06$

$x = 7.000 \pm 0.063$

$x = 7.000 \pm 0.0632$

} ??

5.00 ± 0.014 ?



สรุป Experimental Error

- วัดค่า x n ครั้ง $\Rightarrow$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$

- ค่าเฉลี่ย $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$

  ค่าเฉลี่ย $s^2 = \frac{1}{n-1}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\right]$

  ค่าเฉลี่ย $\sigma_{mx}^2 = \frac{s^2}{n} \Rightarrow \sigma_{mx} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

- รายงาน $x = \bar{x} \pm \sigma_{mx}$

[s เป็นความคลาดเคลื่อนของการวัด 1 ครั้ง

σ_{mx} เป็นความคลาดเคลื่อนของค่าเฉลี่ย $\Rightarrow \sigma_m$ ลดลง s อยู่ $\sqrt{n}$ เท่า]

สรุป Error Propagation

- วัด x หลายๆ ครั้ง วัด y หลายๆ ครั้ง

  $\Rightarrow \bar{x} \pm \sigma_{mx}$, $\bar{y} \pm \sigma_{my}$

- $w = w(x, y)$

$$\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\sigma_{mw} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_{mx}^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_{my}^2}$$

ตัวอย่าง วัดค่า x และ y หลายๆ ครั้ง ได้ค่าดังนี้

$$x: \quad 98, 101, 102, 100, 99$$

$$y: \quad 21.2, 20.8, 18.1, 20.3, 19.6, 20.4, 19.5, 20.1$$

ค่าของตัวแปรต่อไปนี้ควรจะถูกรายงานอย่างไร ความคลาดเคลื่อนเท่าไหร่

1. x
2. y
3. $x + y$
4. xy
5. y/x
6. x^2y^3
7. $\sin y$
8. $\ln x$
9. $y \ln x$

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\left(98+101+\ldots+99\right) = 100$$

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1}\left(2^2+1^2+2^2+0^2+1^2\right) = 2.5$$

$$\sigma_{mx}^2 = \frac{s_x^2}{5} = \frac{2.5}{5} = 0.5$$

$$\sigma_{mx} = \sqrt{0.5} = 0.7$$

$$x = 100.0 \pm 0.7$$

ตัวอย่าง วัดค่า x และ y หลายๆ ครั้ง ได้ค่าดังนี้

$$x: \quad 98, 101, 102, 100, 99$$

$$y: \quad 21.2, 20.8, 18.1, 20.3, 19.6, 20.4, 19.5, 20.1$$

ค่าของตัวแปรต่อไปนี้ควรจะถูกรายงานอย่างไร ความคลาดเคลื่อนเท่าไหร่

1. x
2. y
3. $x + y$
4. xy
5. y/x
6. x^2y^3
7. $\sin y$
8. $\ln x$
9. $y \ln x$

$$w = xy$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$$

$$\sigma_w^2 = y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2$$

$$\frac{\sigma_w^2}{x^2 y^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

Relative Error ของผลแบบ Quadrature

ตัวอย่าง วัดค่า x และ y หลายๆ ครั้ง ได้ค่าดังนี้

$$x: \quad 98, 101, 102, 100, 99$$

$$y: \quad 21.2, 20.8, 18.1, 20.3, 19.6, 20.4, 19.5, 20.1$$

ค่าของตัวแปรต่อไปนี้ควรจะถูกรายงานอย่างไร ความคลาดเคลื่อนเท่าไหร่

1. x
2. y
3. $x + y$
4. xy
5. y/x
6. x^2y^3
7. $\sin y$
8. $\ln x$
9. $y \ln x$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$$

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \sigma_y^2$$

$$\frac{x^2 \sigma_w^2}{y^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2}$$

Relative Error ของ Quantity

$$\left[\frac{\sigma_w}{(y/x)}\right]^2 = \left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$