

Midterm Exam: SCPY 208 Probability and Statistics (ฉบับลองทำ)

ชื่อ _____ เลขประจำตัว _____

ข้อมูลและข้อเสนอนแนะ

- การสอบนี้จัดขึ้นในวันจันทร์ที่ 8 มีนาคม 2564 เวลา 10:00 - 12:00 มีเวลาในการทำข้อสอบ 2 ชั่วโมง
- ข้อสอบชุดนี้ประกอบด้วยคำถามจำนวน 6 ข้อ ข้อสอบมีทั้งหมด 10 หน้า โดยมีหน้าที่เป็นคำถาม 6 หน้า
- ข้อสอบนี้มีคะแนนรวม 100 คะแนน คำถามแต่ละข้อมีคะแนนตามที่ระบุไว้ในวงเล็บ
- ให้แสดงวิธีทำในพื้นที่ว่างที่เว้นไว้ในกระดาษคำถาม ถ้าพื้นที่ที่ให้ไม่พอ ให้ใช้พื้นที่ด้านหลังหรือในกระดาษเปล่าที่แนบมาทำข้อสอบ ในกรณีนั้นขอให้เขียนระบุให้ชัดเจนว่ากำลังทำข้อใด
- ขอให้เขียนชื่อนามสกุลและเลขประจำตัวนักศึกษาให้ชัดเจนบนหน้าแรกของข้อสอบ นอกจากนี้ขอให้เขียนเลขประจำตัวนักศึกษาสามตัวสุดท้ายบนกระดาษทุกแผ่น นี้จะมีประโยชน์ในกรณีที่ข้อสอบหลุดออกจากกัน
- อนุญาตให้ใช้เครื่องคิดเลขวิทยาศาสตร์ในการทำข้อสอบชุดนี้ แต่ไม่อนุญาตให้ใช้โทรศัพท์มือถือหรืออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์อื่นใดช่วย
- ขอให้แสดงวิธีทำให้ชัดเจน เขียนให้เรียบร้อยอ่านง่าย

ส่วนนี้สำหรับคนตรวจ

1	2	3	4	5	6	Total

1. [10 คะแนน]

- (a) โยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทั้งสองลูกจะเป็นเลขคู่
- (b) โยนลูกเต๋า n ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทันทีจะเป็นเลขคู่

2. [15 คะแนน] เราจะสมมติว่าหนึ่งปีมี 365 วัน และสมมติด้วยว่าคนมีความน่าจะเป็นเท่าๆ กันที่จะเกิดในวันใดๆ ของปี

(a) จงหาความน่าจะเป็นที่คน 4 คนจะมีวันเกิดไม่ซ้ำกัน

(b) จงพิสูจน์ว่า ความน่าจะเป็นที่คน n คนจะมีวันเกิดไม่ซ้ำกันสามารถเขียนได้ดังนี้

$$P = \frac{1}{365^n} \frac{365!}{(365-n)!} = \left(1 - \frac{1}{365}\right) \left(1 - \frac{2}{365}\right) \left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

(c) จงหาค่า n ที่มากที่สุดที่ความน่าจะเป็นนี้ยังมีค่ามากกว่า $\frac{1}{2}$

$$P(1) = 1$$

$$P(2) = 1 - \frac{1}{365}$$

$$P(3) = P(2) \left(1 - \frac{2}{365}\right)$$

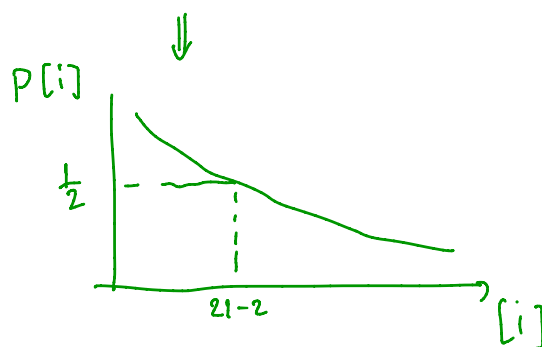
$$P(n) = P(n-1) \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

$$P = \text{array}(365)$$

$$P[0] = 1$$

for $i = 1, 2, \dots, 364$:

$$P[i] = P[i-1] \times \left(1 - \frac{i-1}{365}\right)$$



$$P(n) = \frac{P(365, n)}{365^n} \Rightarrow$$

$$P(20) = 0.58$$

$$P(21) = 0.55$$

$$P(22) = 0.52$$

$$P(23) = 0.49$$

3. [20 คะแนน] ผู้ขายขนมอัตโนมัติเครื่องหนึ่งทำงานแบบรวนๆ เมื่อหยอดเหรียญซื้อขนมเครื่องจะให้ขนมออกมาเสมอ แต่ บางครั้งเครื่องก็คืนเงินที่หยอดเข้าไปกลับมาด้วย โดยความน่าจะเป็นที่เครื่องจะคืนเงินเป็น p นักศึกษาคนหนึ่งหยอดเหรียญซื้อขนมกับเครื่องนี้ ถ้าเครื่องคืนเงินมาให้เขาก็จะนำเงินนั้นไปหยอดกลับเข้าไปเพื่อซื้อขนม ซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่าเครื่องจะกินเงินเข้าไปในที่สุดจึงจะหยุด

- (a) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคนนี้จะได้ขนม 3 ชิ้นพอดี (แปลว่าเครื่องคืนเงินให้เมื่อซื้อสองชิ้นแรก และกินเงินเมื่อซื้อชิ้นที่สาม)
- (b) จงหาความน่าจะเป็นที่นักศึกษาคนนี้จะได้ขนม n ชิ้นพอดี
- (c) จงหา expected value ของจำนวนขนมที่นักศึกษาคนนี้จะได้ออกมาจากเครื่องนี้

Hint: อนุกรมต่อไปนี้อาจจะมีประโยชน์ (เมื่อ $|k| < 1$)

$$1 + 2k + 3k^2 + 4k^3 + 5k^4 + \dots = \frac{1}{(1-k)^2}$$

$$p = \text{ได้เงิน} \quad 1-p = \text{ไม่เงิน}$$

$$(a) \quad 3 \text{ ชิ้น} \Rightarrow \text{ได้} \quad 2 \text{ ครั้ง} + \text{ไม่} \quad 1 \text{ ครั้ง}$$

$$p(3) = p^2(1-p)$$

$$(b) \quad n \text{ ชิ้น} = \text{ได้} \quad n-1 + \text{ไม่} \quad 1$$

$$p(n) = p^{n-1}(1-p)$$

$$(c) \quad E(x) = 1 \times (1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + 4p^3(1-p) + \dots$$

$$= [1-p] [1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \dots]$$

$$= [1-p] \left[\frac{1}{(1-p)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{1-p}$$

$$p = 0 \Rightarrow E(x) = 1$$

$$p \rightarrow 1 \Rightarrow E(x) \rightarrow \infty$$

$$p = 0.1 \Rightarrow E(x) = \frac{1}{0.9} \approx 1.11$$

จำนวนขนม x	$p(x)$
1	$1-p$
2	$p(1-p)$
3	$p^2(1-p)$
4	$p^3(1-p)$
5	$p^4(1-p)$
\vdots	\vdots

4. [20 คะแนน] ตัวแปรสุ่ม x มี probability distribution function ที่เขียนได้ในรูป

$$f(x) dx = \begin{cases} Cx^n dx & , \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

โดยที่ C เป็นค่าคงที่สำหรับ normalization และ n เป็นค่าคงที่ที่มีค่าในช่วง $0 \leq n < \infty$

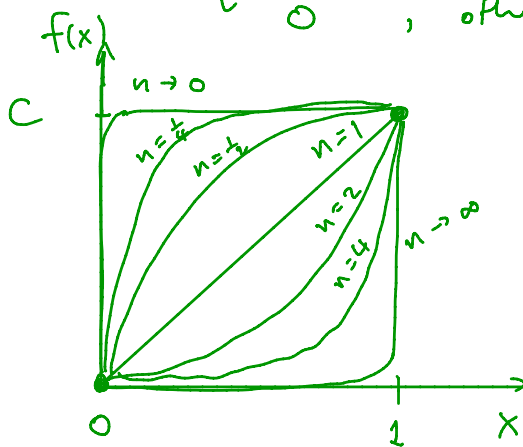
(a) จงหา expected value ของ x โดยให้ติดคำตอบในรูปของตัวแปร n

(b) จงวาดกราฟระหว่าง $E(x)$ และ n และอธิบายพฤติกรรมที่เกิดขึ้น

(a) หา C : $\int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow C$

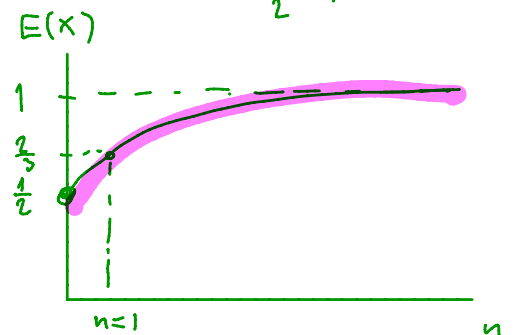
หา $E(x)$: $E(x) = \int_0^1 x f(x) dx$
 $\Rightarrow E(x)$ อยู่ในรูป n

(b) $f(x) = \begin{cases} Cx^n & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$



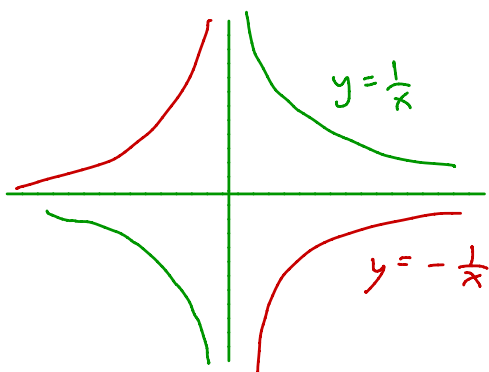
$$E(x) - 1 = -\frac{1}{n+2}$$

$$\Rightarrow E(x) \begin{cases} = \frac{2}{3} & , n=1 \\ = 1 & , n=\infty \\ = \frac{1}{2} & , n=0 \end{cases}$$

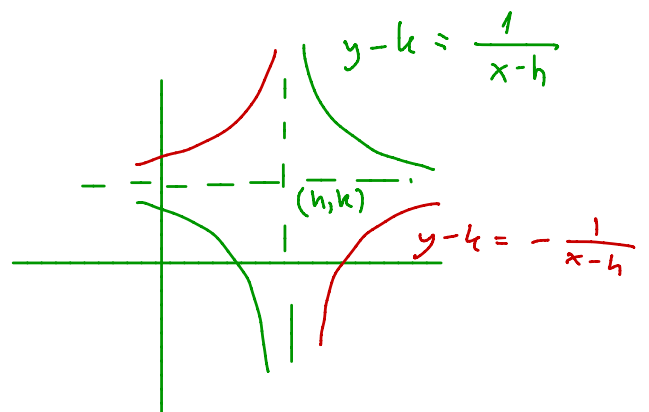


$$E(x) = \frac{n+1}{n+2}$$

$$E(x) = 1 - \frac{1}{n+2}$$



\Rightarrow



5. [20 คะแนน] จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้อยู่โดยใช้ discrete probability distribution ที่เหมาะสมกับสถานการณ์

Binomial
 $n=15$ $p=\frac{1}{6}$

(a) โยนลูกเต๋า 15 ครั้ง โดยลูกเต๋ามิถูกล้วงน้ำหนักทำให้มีโอกาสออกแต่ละด้านเท่าๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะออกเลขหนึ่งไม่ถึงสามครั้ง

(b) ถนนชนบทเส้นหนึ่งมีรถผ่านโดยเฉลี่ย 10 คันต่อชั่วโมง ชายคนหนึ่งไปยืนนับรถที่ผ่านไปเป็นเวลา 10 นาที จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีรถผ่านไปสองคันขึ้นไปในช่วงที่เขา นับ

Poisson

$$\lambda = \frac{10}{6}$$

6. [15 คะแนน] กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม x มีค่า expected value เป็น μ และ standard deviation เป็น σ และสัญลักษณ์ $E(\dots)$ หมายถึง expected value ของปริมาณที่อยู่ในวงเล็บ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(a) $E(x - \mu) = 0$

(b) $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

(c) $E(ax + b) = a\mu + b$ (โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่)

โดยให้เลือกพิสูจน์สำหรับ x ที่เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง อย่างไม่อย่างหนึ่ง

หน้านี้เป็นกระดาษเปล่า ให้ใช้ได้ถ้าต้องการพื้นที่เขียนคำตอบเพิ่ม กรุณาเขียนเลขข้อที่กำลังทำให้ชัดเจน

หน้านี้เป็นกระดาษเปล่า ให้ใช้ได้ถ้าต้องการพื้นที่เขียนคำตอบเพิ่ม กรุณาเขียนเลขข้อที่กำลังทำให้ชัดเจน

หน้านี้เป็นกระดาษเปล่า ให้ใช้ได้ถ้าต้องการพื้นที่เขียนคำตอบเพิ่ม กรุณาเขียนเลขข้อที่กำลังทำให้ชัดเจน