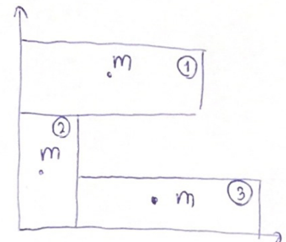
# SCPY 156

แบบฝึกหัดที่ 2 เฉลย

1.




จุดศูนย์กลางมวล ① อยู่ที่

$$\vec{r}_{cm1} = 10\,cm\,\hat{x} + 25\,cm\,\hat{y}$$

จุดศูนย์กลางมวล ② อยู่ที่

$$\vec{r}_{cm2} = 5\,cm\,\hat{x} + 10\,cm\,\hat{y}$$

จุดศูนย์กลางมวล ③ อยู่ที่

$$\vec{r}_{cm3} = 20\,cm\,\hat{x} + 5\,cm\,\hat{y}$$

หา $\vec{r}_{cm,\text{ทั้งระบบ}}$

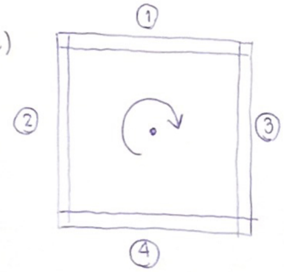
$$\vec{r}_{cm,\text{ระบบ}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_{cm,i} \quad \text{โดยที่ } M = m_{①} + m_{②} + m_{③}$$

$$= \frac{1}{3m} \cdot m \left( 10\,cm\,\hat{x} + 25\,cm\,\hat{y} + 5\,cm\,\hat{x} + 10\,cm\,\hat{y} + 20\,cm\,\hat{x} + 5\,cm\,\hat{y} \right)$$

$$\boxed{\vec{r}_{cm,\text{ระบบ}} = \frac{1}{3}\left( 35\,cm\,\hat{x} + 40\,cm\,\hat{y} \right)}$$

2. หาโมเมนต์ความเฉื่อย

a)



$$I = I_{1} + I_{2} + I_{3} + I_{4}$$

$$I_{1} = I_{cm} + md^2$$

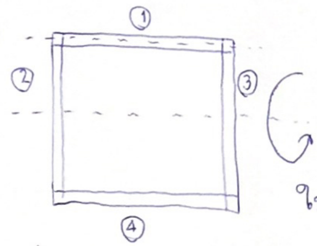
$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_{1} = \frac{1}{3}ML^2$$

พิจารณาจากรูปจะพบว่า $I_{2}, I_{3}, I_{4}$ จะเท่ากับ $I_{1}$

$$\Rightarrow \quad I = 4I_{1} = \frac{4}{3}ML^2$$

b)



$$I = I_{1} + I_{2} + I_{3} + I_{4}$$

$$I_{1} = I_{cm} + md^2$$

ในกรณีนี้แกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของแท่ง ① จะผ่านแท่งตามแนวยาวตามภาพ และขนานกับแกนหมุนที่กำหนดมาให้ ดังนั้น $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$

สมมติให้แท่งฯ เป็นทรงกระบอกรัศมี $R$ แต่ถ้า $R \ll L$ $I_{cm}$ นี้จะน้อยกว่า $I_{1}$ มากๆ ทำให้สามารถตัดละได้.

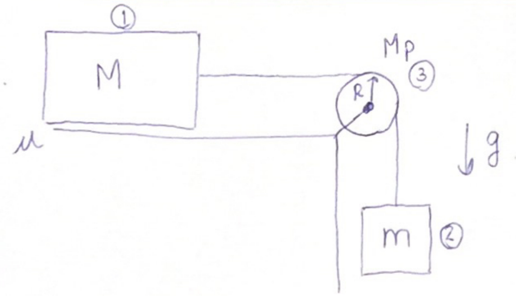
$$\Rightarrow \quad I_{1} = \cancel{\frac{1}{2}MR^2}^{\,0} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}ML^2$$

จากรูป $\quad I_{1} = I_{4}$

และ $\quad I_{2} = I_{3} = \frac{1}{12}ML^2$ เพราะแกนหมุนที่กำหนดมาให้ผ่านจุดศูนย์กลางมวล.

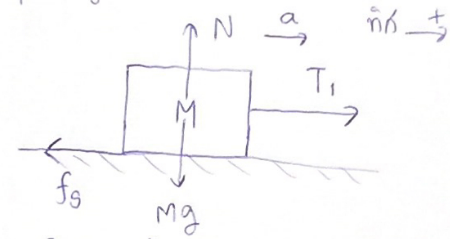
$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 + \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{12}ML^2 = \frac{2}{3}ML^2$$

3.




วาด free body diagram ของ~~และ~~ แต่ละมวล.

1




พิจารณาแรงในแนวตั้ง

$$\Sigma F = ma$$

$$Mg - N = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = Mg \quad \cdots \quad (1)$$

พิจารณาแรงในแนวนอน

$$\Sigma F = ma$$

$$T_1 - f_s = Ma$$

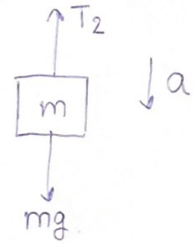
$$T_1 - \mu N = Ma$$

จากค่า N ในสมการ (1) จะได้ว่า

$$T_1 - \mu Mg = Ma \quad \cdots \quad (2)$$

2 พิจารณามวล 2

ทิศ + ↓



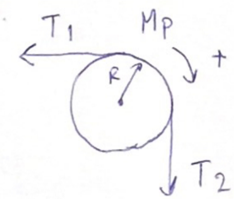

a ← เท่ากับค่า a ใน 1

เนื่องจากเชือกที่เชื่อมระหว่างมวล 1 และ 2 ไม่ยืดหรือหด

$$\Rightarrow \quad \Sigma F = ma$$

$$mg - T_2 = ma \quad \cdots \quad (3)$$

3 พิจารณารอก




$$\Sigma \vec{\tau} = I\alpha$$

$$T_2 \cdot R - T_1 R = I\alpha$$

ให้ $I$ ของรอกเท่ากับ $I = \frac{1}{2} M_p R^2$

เนื่องจาก $\alpha = \frac{a}{R}$

$$\Rightarrow \quad T_2 \cancel{R} - T_1 \cancel{R} = \frac{1}{2} M_p R^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{R}}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M_p a \quad \cdots \quad (4)$$

นำสมการที่ (2) บวกกับสมการที่ 3

2 + 3

$$T_1 - \mu Mg + mg - T_2 = ma + Ma$$

$$mg - \mu Mg - (T_2 - T_1) = (m + M)a$$

แต่จากสมการที่ 4 เรา~~หา~~ แทน $T_2 - T_1$ ด้วย $\frac{1}{2}M_p a$ ได้

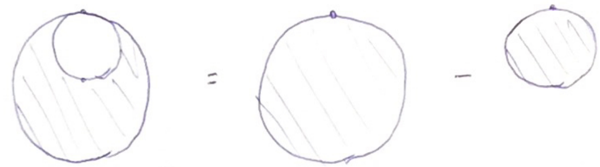
$$\Rightarrow \quad (m - \mu M)g - \frac{1}{2}M_p a = (m + M)a$$

$$\Rightarrow \quad \left(m + M + \frac{1}{2}M_p\right)a = (m - \mu M)g$$

$$\boxed{a = \frac{(m - \mu M)g}{\left(m + M + \frac{1}{2}M_p\right)}}$$

4. a) จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของ


จากรูปเราจะเห็นว่า วัตถุนี้เกิดจากการที่เราตัดวงกลมรัศมี $R/2$ ออกจากวงกลมรัศมี $R$




ดังนั้น

$$I_{\text{ที่เหลือ}} = I_R - I_{R/2}$$

$$I_R = I_{cm} + md^2$$
$$= \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\cancel{\tfrac{R}{2}}R\right)^2$$
$$= \frac{3}{2}M_R R^2$$

$$I_{R/2} = I_{cm} + md^2$$
$$= \frac{1}{2}M_{R/2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$= \frac{3}{8}M_{R/2}R^2$$

ถ้าให้ความหนาแน่นของวัตถุเป็น $\sigma$ (ความหนาแน่นต่อพื้นที่).

$$M_R = \sigma \cdot \pi R^2 \qquad M_{R/2} = \sigma\pi\frac{R^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad I_R = \frac{3}{2}\cdot\sigma\pi R^2\cdot R^2 = \frac{3}{2}\pi\sigma R^4$$

$$I_{R/2} = \frac{3}{8}\cdot\sigma\pi\frac{R^2}{4}\cdot R^2 = \frac{3}{32}\pi\sigma R^4$$

ดังนั้น

$$I_{\text{ที่เหลือ}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{32}\right)\pi\sigma R^4 = \frac{45}{32}\pi\sigma R^4$$

ข้อนี้อาจารย์ไม่ได้บอก $\sigma$ มา แต่นักเรียนสามารถตั้งค่าตัวแปรนี้หรือตัวแปลอื่นที่นักเรียนต้องใช้ได้.

b). จากสมการการสั่นของ physical pendulum เราจะได้ว่า

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

โดยที่ $m$ คือมวลของวัตถุ

$d$ คือระยะระหว่างจุดหมุนกับจุดศูนย์กลางมวล

$I$ คือโมเมนต์ความเฉื่อย

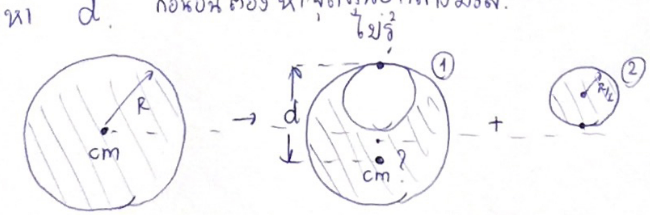
จากรูปสามารถหา $m$ ได้

$$m = M_R - M_{R/2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\sigma\pi R^2 = \frac{3}{4}\sigma\pi R^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\sigma\pi R^2 \, g d}{I}}$$

เรารู้ $I$ จากข้อ a)

เราต้องหา $d$. ก่อนอื่นต้องหาจุดศูนย์กลางมวล.




$\vec{r}_{cm} = 0$ $\qquad$ $\vec{r}_{cm} = ?$ $\qquad$ $\vec{r}_{cm} = \frac{R}{2}\hat{y}$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$$

ต้องการหา

$$0 = \frac{1}{M}\left(m_1 \vec{r}_{cm,1} + m_2 \vec{r}_{cm,2}\right)$$

$$M = M_R = 6\pi R^2$$

$$m_1 = \frac{3}{4} 6\pi R^2$$

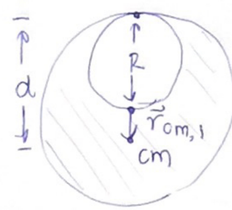
$$m_2 = \frac{1}{4} 6\pi R^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\cancel{6\pi R^2}} \left( \frac{3}{4} \cancel{6\pi R^2} \cdot \vec{r}_{cm,1} + \frac{1}{4} \cancel{6\pi R^2} \cdot \frac{R}{2} \hat{y} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \vec{r}_{cm,1} + \frac{R}{8} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{cm,1} = -\frac{R}{8_2} \cdot \frac{4}{3} \hat{y} = -\frac{R}{6} \hat{y}$$

ดังนั้น $d = R + \frac{R}{6} = \frac{7R}{6}$




ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{3}{4} \cancel{6\pi R^2} \, g \cdot 7\cancel{R}/6}{45/32 \, \cancel{6\pi R^4}}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{\cancel{7}^{7}}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{32}^{\cancel{16}\,4}}{45} \cdot \frac{g}{R}}$$

$$= \sqrt{\frac{28}{45} \cdot \frac{g}{R}}$$

หาคาบการสั่น $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{45}{38} \cdot \frac{R}{g}}}$