SCPY156
System of Particles and Extended Objects

SCPY156
System of Particles and Extended Objects

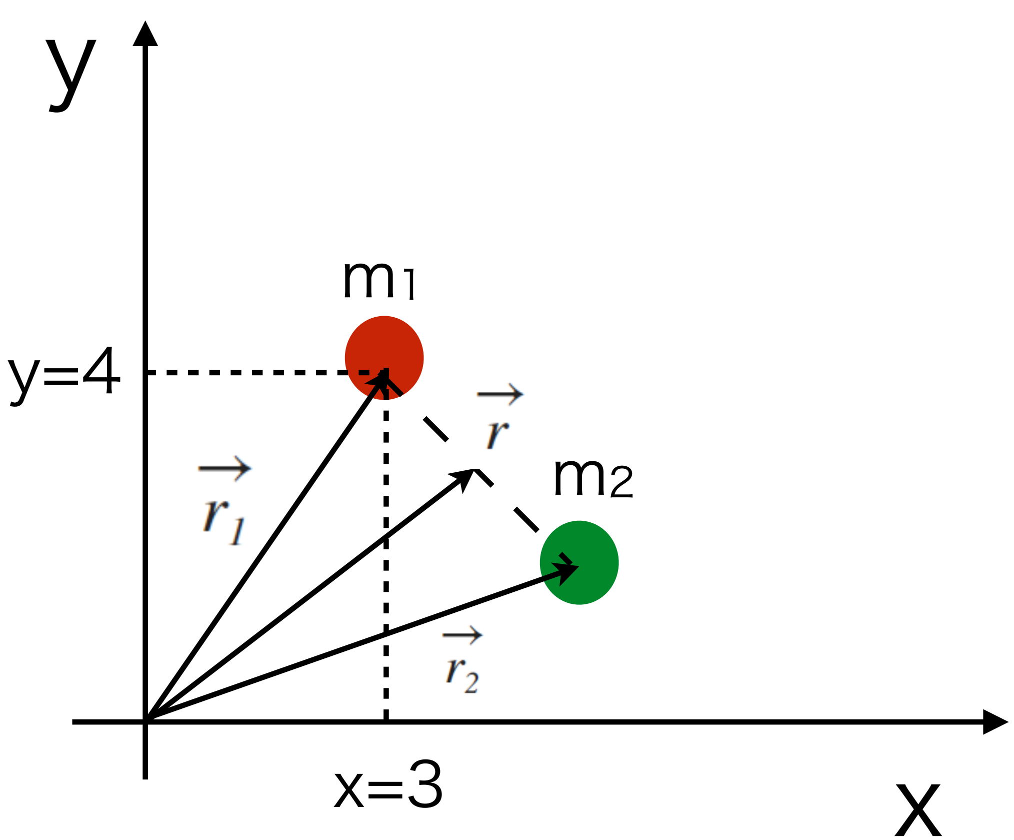
http://einstein.sc.mahidol.ac.th/~yuma/scpy156/scpy156_2017_1.pdf

Center of Mass (จุดศูนย์กลางมวล)

- ถ้ามีวัตถุมวล m_1 ที่พิกัด x=3, y=4 ตำแหน่งของวัตถุ สามารถเขียนเป็น $\vec{r}_1 = 3\hat{x} + 4\hat{y}$ หรือ $\vec{r}_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

- พิจารณาระบบที่ประกอบด้วยมวลสองก้อน m_1 และ m_2 ตำแหน่งรวมของวัตถุจะเป็น

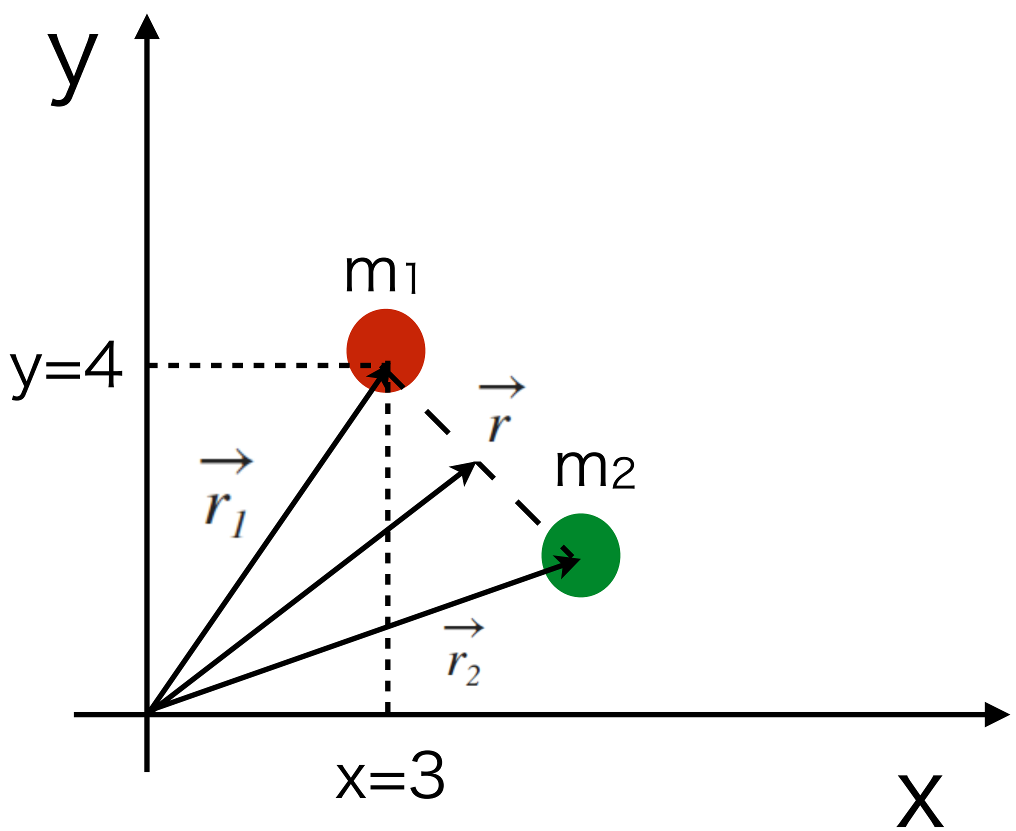
$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$



ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล คือ การเฉลี่ยตำแหน่งของแต่ละวัตถุตามมวล

Center of Mass (จุดศูนย์กลางมวล)

- เราสามารถเขียนจุดศูนย์กลางมวลแยกตามแกนได้ เช่น



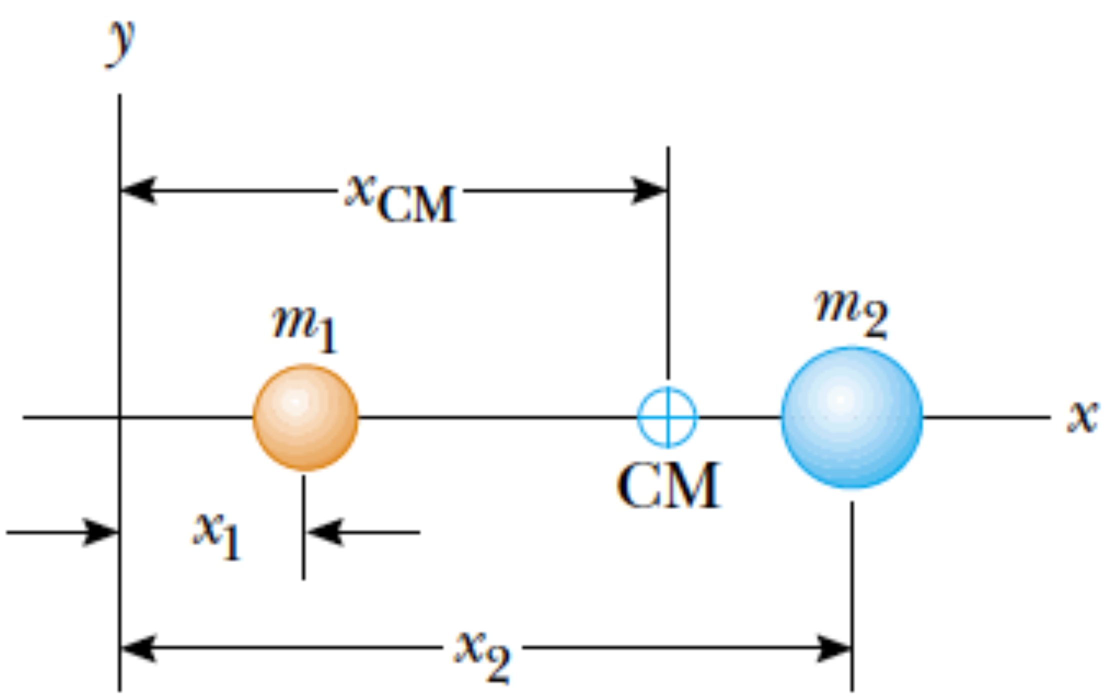
$$X = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

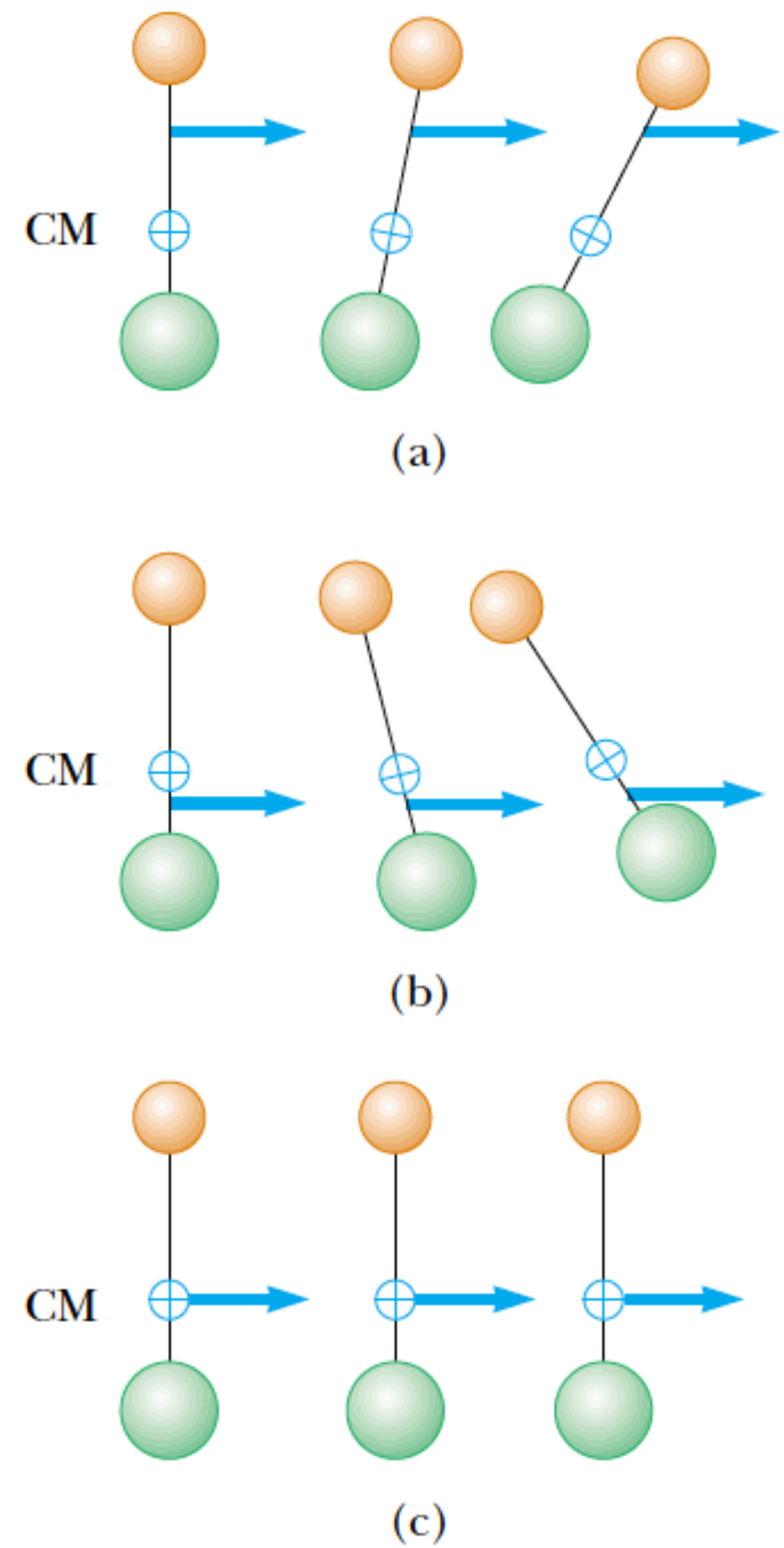
$$Y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$Z = \frac{z_1 m_1 + z_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}}$$

Center of Mass (จุดศูนย์กลางมวล)

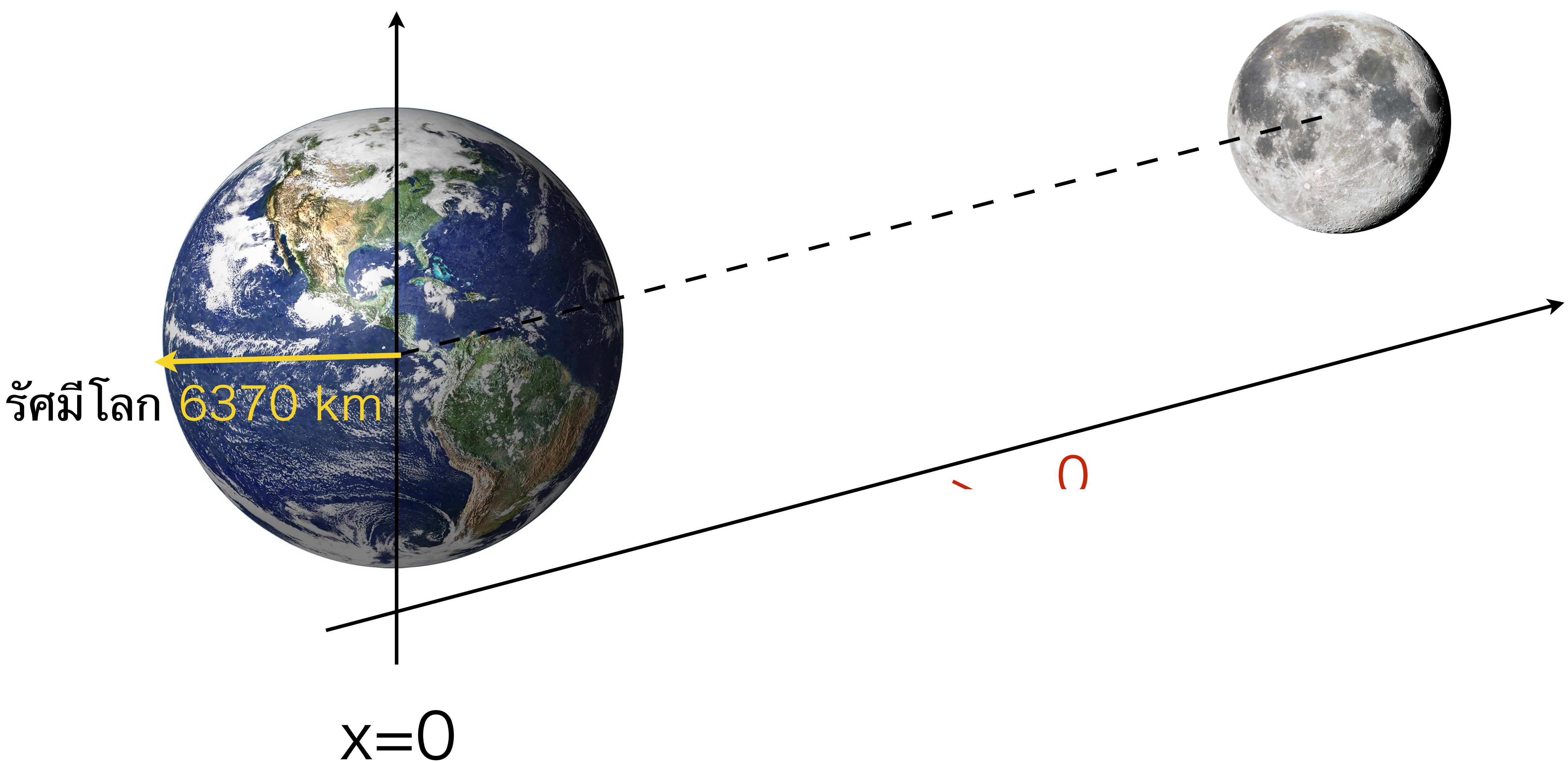




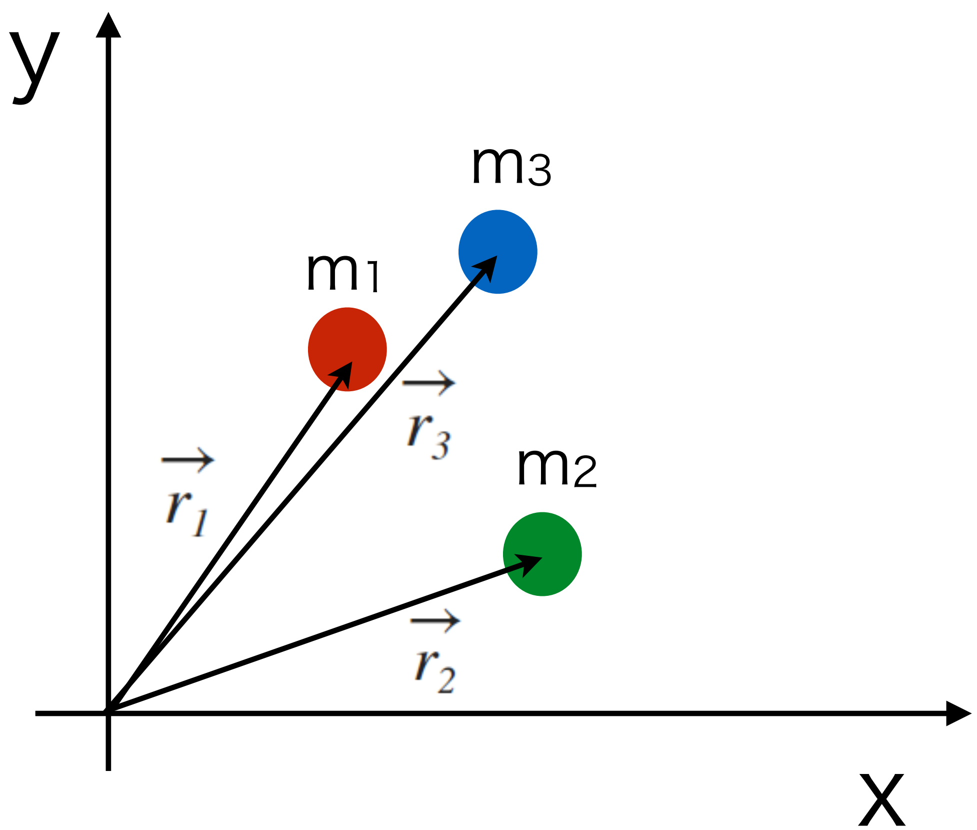
- จุดศูนย์กลางมวลของระบบที่มวลสองก้อนไม่เท่ากัน จะอยู่เอียงไปทางมวลที่ใหญ่กว่า

Center of Mass (จุดศูนย์กลางมวล)

- <u>ตัวอย่าง</u>
  - โลกมีมวล 6×10^{24} kg และดวงจันทร์มีมวล 7.4×10^{22} kg ดวงจันทร์โคจรรอบโลกของเราที่ระยะทาง 384,000 km จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบโลก-ดวงจันทร์?



จุดศูนย์กลางมวลของระบบหลายมวล



- ถ้าในระบบมีวัตถุมากกว่า 2 ชิ้น

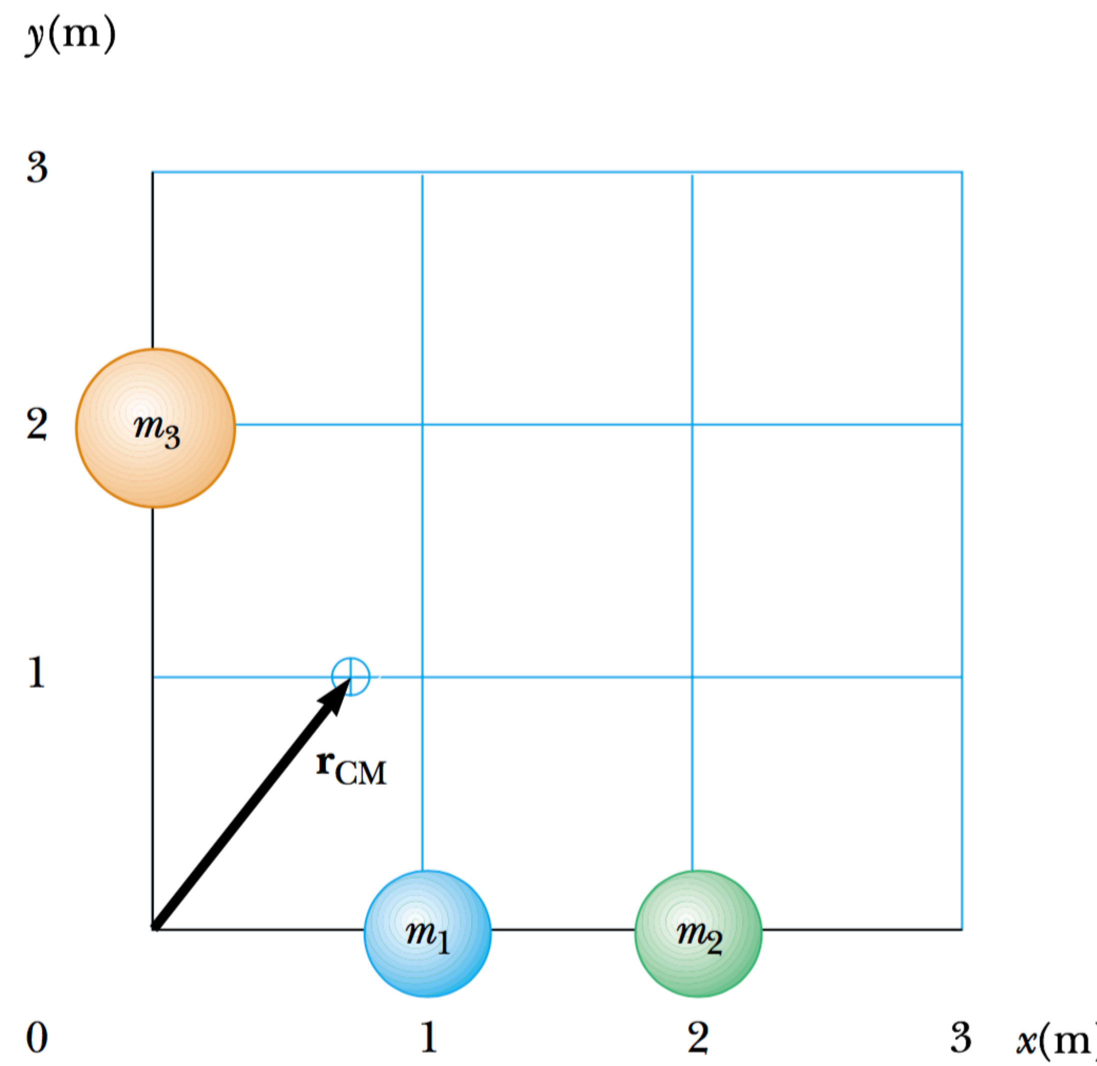
$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i$$

มวลทั้งหมดของวัตถุในระบบ

Quiz1:

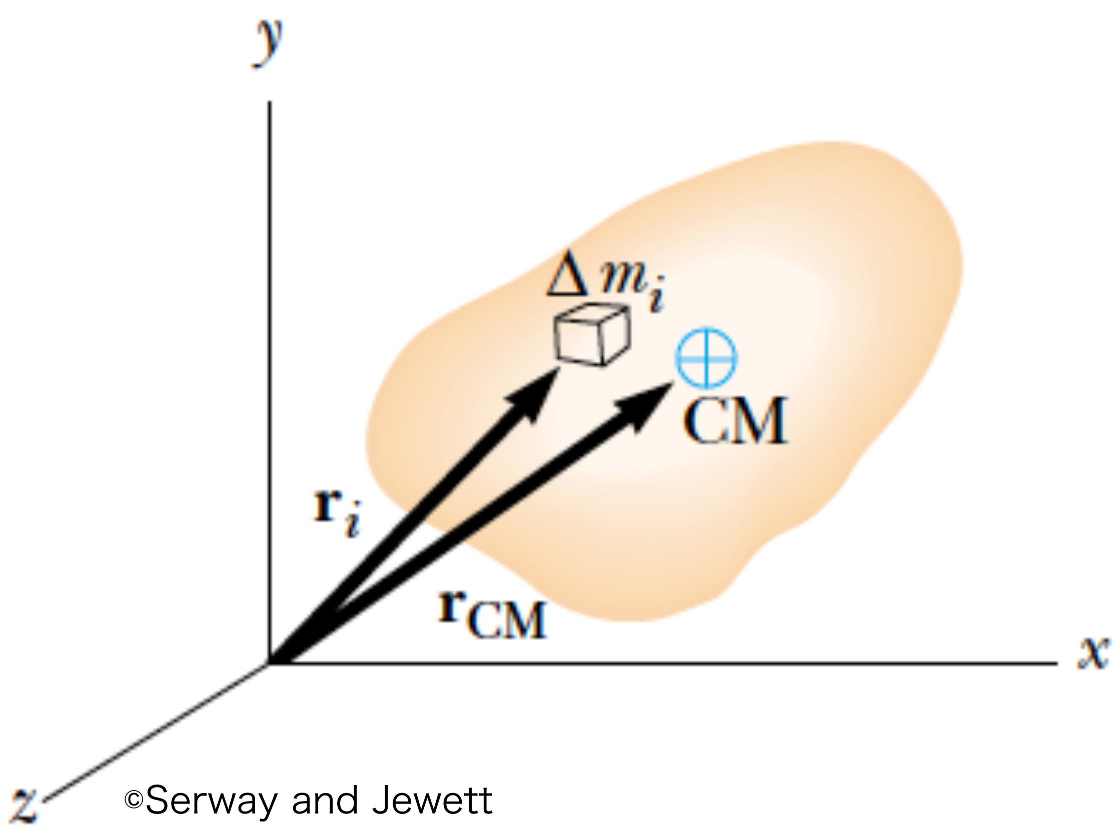
- A system consists of 3 particles located as shown in the right figure. Find the center of mass of the system.



(a) ©Serway and Jewett

จุดศูนย์กลางมวลของระบบหลายมวล

- ในกรณีที่เป็นวัตถุขนาดใหญ่



©Serway and Jewett

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i \vec{r}_i \, \Delta m_i}{M}$$

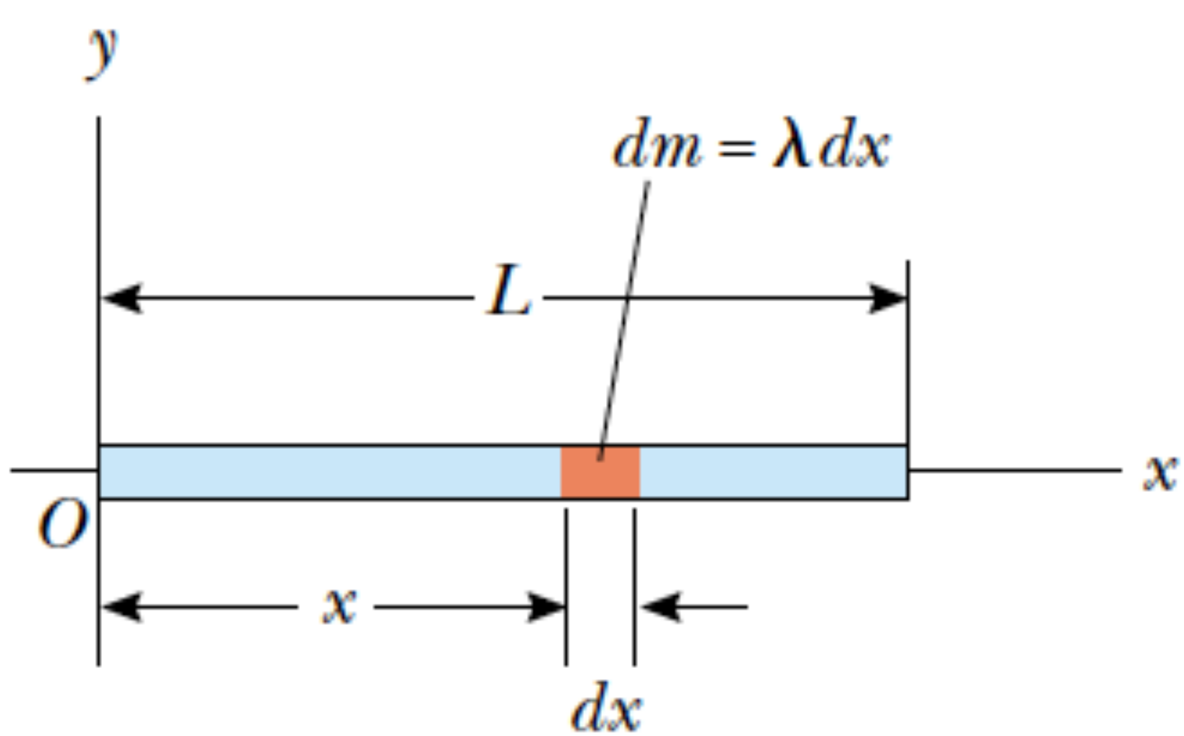
ถ้า Δm_i เล็กมากๆ

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum_i \vec{r}_i \, \Delta m_i}{M} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm$$

จุดศูนย์กลางมวลของระบบหลายมวล

- ตัวอย่าง:

1. จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแท่งเหล็กมีความหนาแน่นเชิงเส้นคงที่ λ
2. จงหาจุดศูนย์กลางมวลของแท่งเหล็กมีความหนาแน่นเชิงเส้น $\lambda = \alpha x$



การเคลื่อนที่ของระบบวัตถุ

- ความเร็ว (Velocity)
  - ในกรณีที่มวลของระบบวัตถุคงที่ ไม่มีอะไรหลุดออกจากระบบ ความเร็วของระบบวัตถุ คือ

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p}_{total}$$

โมเมนตัมของระบบวัตถุ มีค่าเท่ากับ ผลรวมของโมเมนตัมย่อย

การเคลื่อนที่ของระบบวัตถุ

- ความเร่ง (Acceleration)

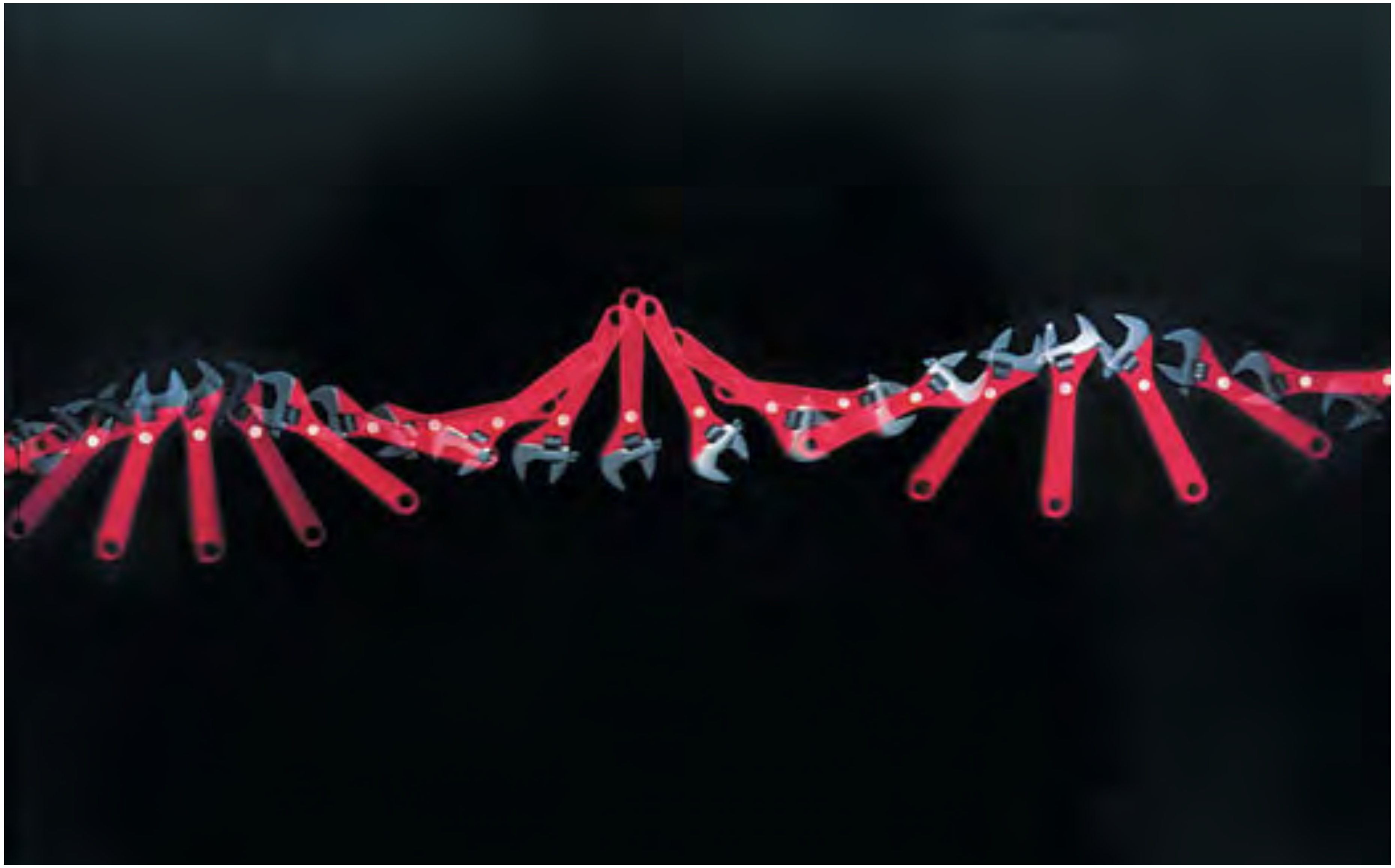
$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

แต่เนื่องจากแรงระหว่างวัตถุที่กระทำภายในระบบจะหักล้างกันหมด ดังนั้น แรงที่เหลือทำให้ระบบวัตถุเคลื่อนที่ได้คือ แรงจากภายนอก

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

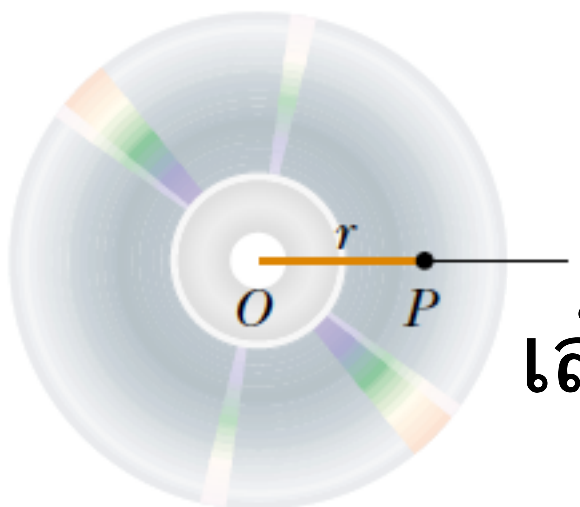
General Motion of the CM



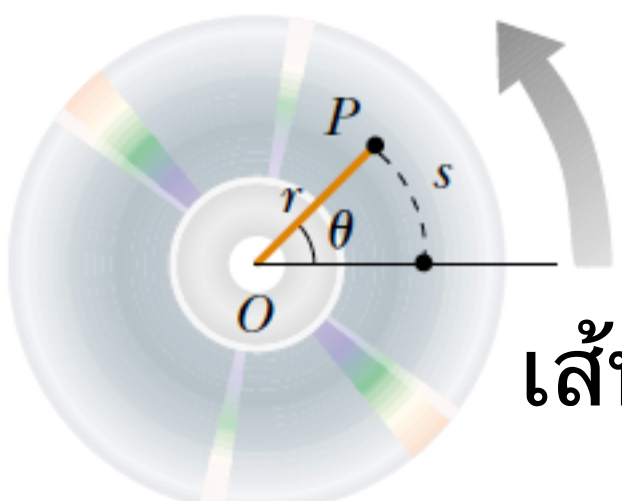
The motion of the extended object can be considered as the motion of a point mass at the CM of the objects.

©Serway and Jewett

การหมุนรอบแกนหยุดนิ่ง



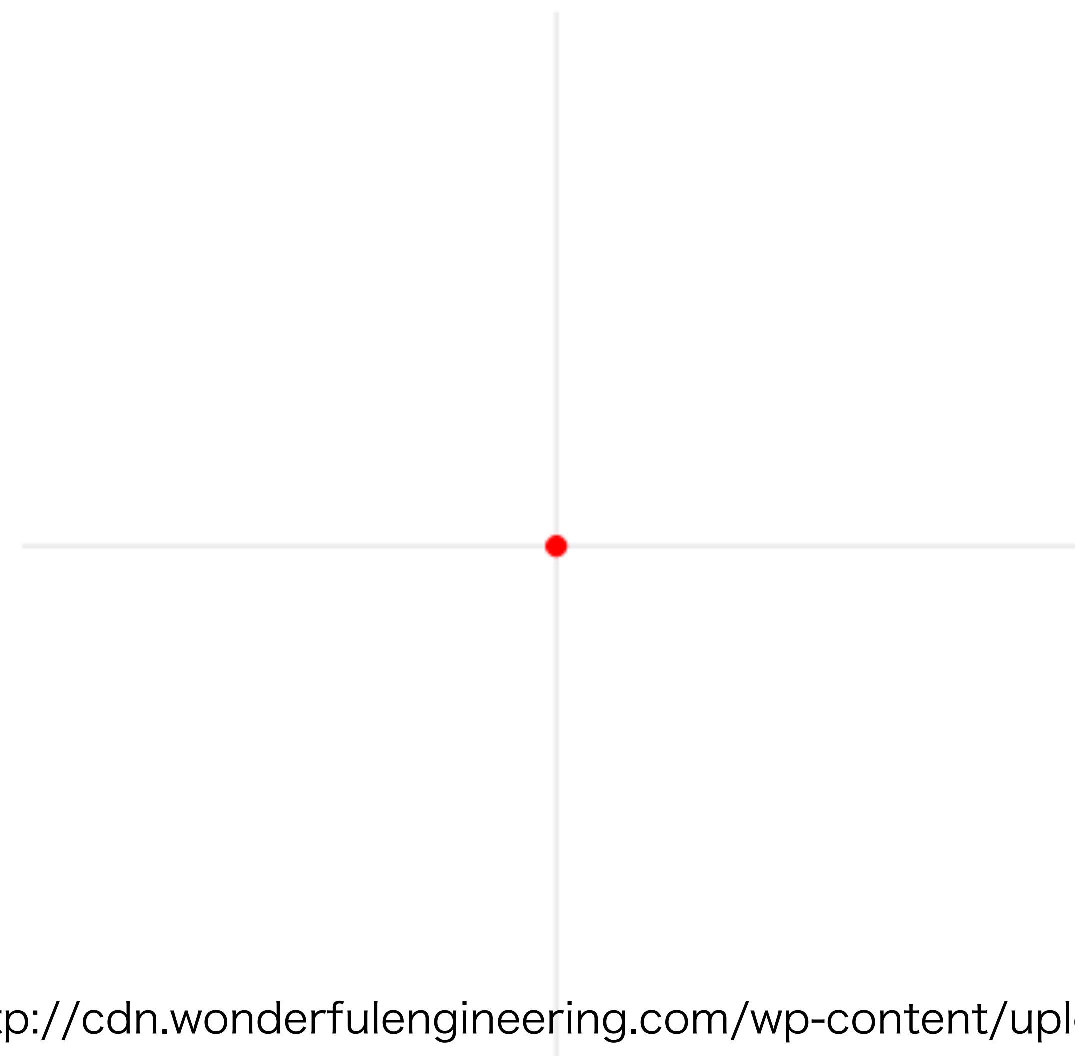
(a)



(b)

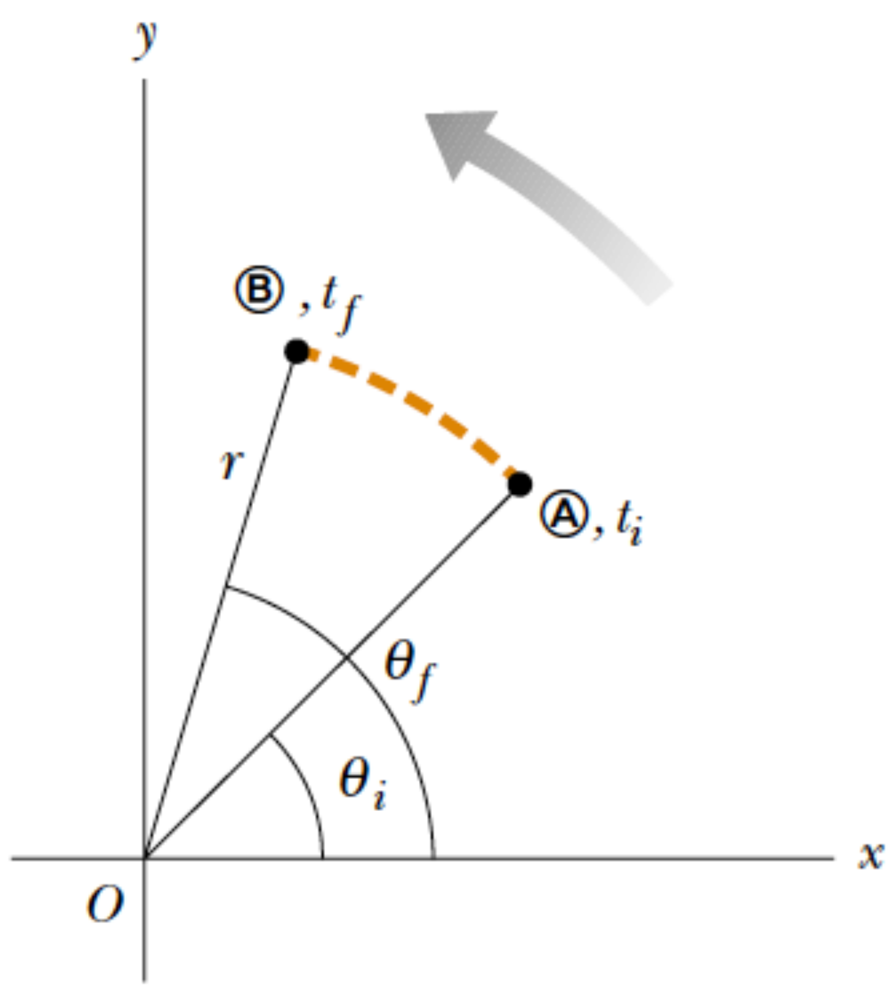
- เส้นโค้ง $s = r\theta$

$$\boxed{\therefore \theta = \frac{s}{r}}$$

- 

http://cdn.wonderfulengineering.com/wp-content/uploads/2015/08/Mathematical-Concepts-Explained-Via-GIFs-13.gif

การหมุนรอบแกนหยุดนิ่ง



©Serway and Jewett

- Angular displacement
  - เมื่อวัตถุเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B ดังรูป จะมีมุมที่เปลี่ยนไปเป็น

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

- อัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมในหนึ่งหน่วยเวลา
  - อัตราเร็วเชิงมุม (Angular speed)

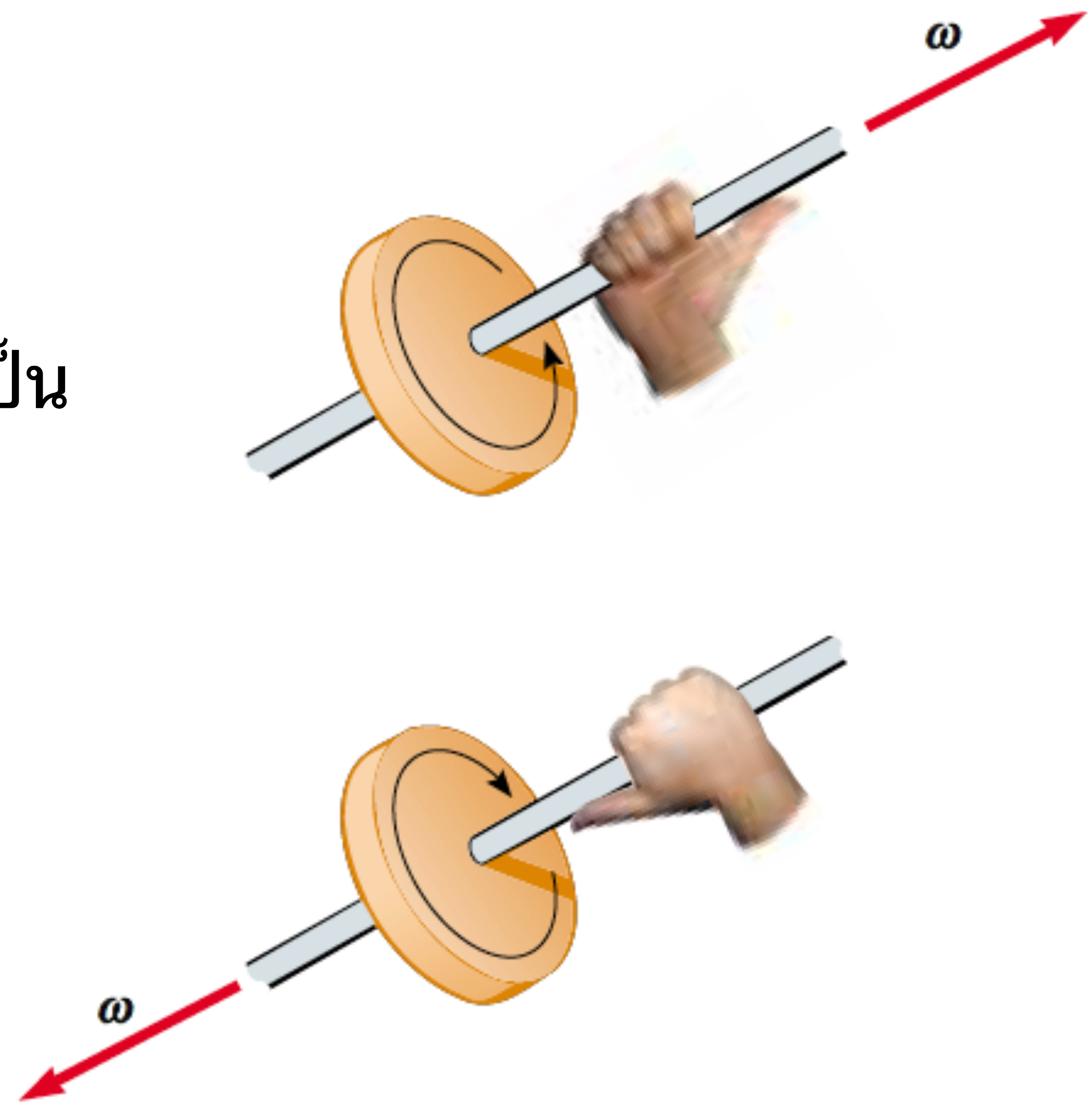
$$\omega = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$$

การหมุนรอบแกนหยุดนิ่ง

- ทิศทางของอัตราเร็วเชิงมุม เป็นไปตามกฎมือขวา
- ในทำนองเดียวกับอัตราเร็วเชิงมุม
  - อัตราเร่งเชิงมุม สามารถเขียนได้เป็น

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$



ถ้าวัตถุหมุนรอบแกนที่หยุดนิ่ง ทุกๆ อนุภาคบนวัตถุนั้นจะเคลื่อนที่เป็นวงกลม ด้วยอัตราเร็วและอัตราเร่งเชิงมุมเท่ากัน

©Serway and Jewett

การหมุนรอบแกนหยุดนิ่ง

- <u>ในกรณีที่อัตราเร่งเชิงมุมคงที่</u> $d\omega = \alpha dt$

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} d\omega = \int_{t_i}^{t_f} \alpha dt \Rightarrow \omega_f = \frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \alpha t$$

$$\boxed{\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{\alpha}{2} t^2}$$

เขียนในรูปยุ่ง (ไม่มีเวลา)

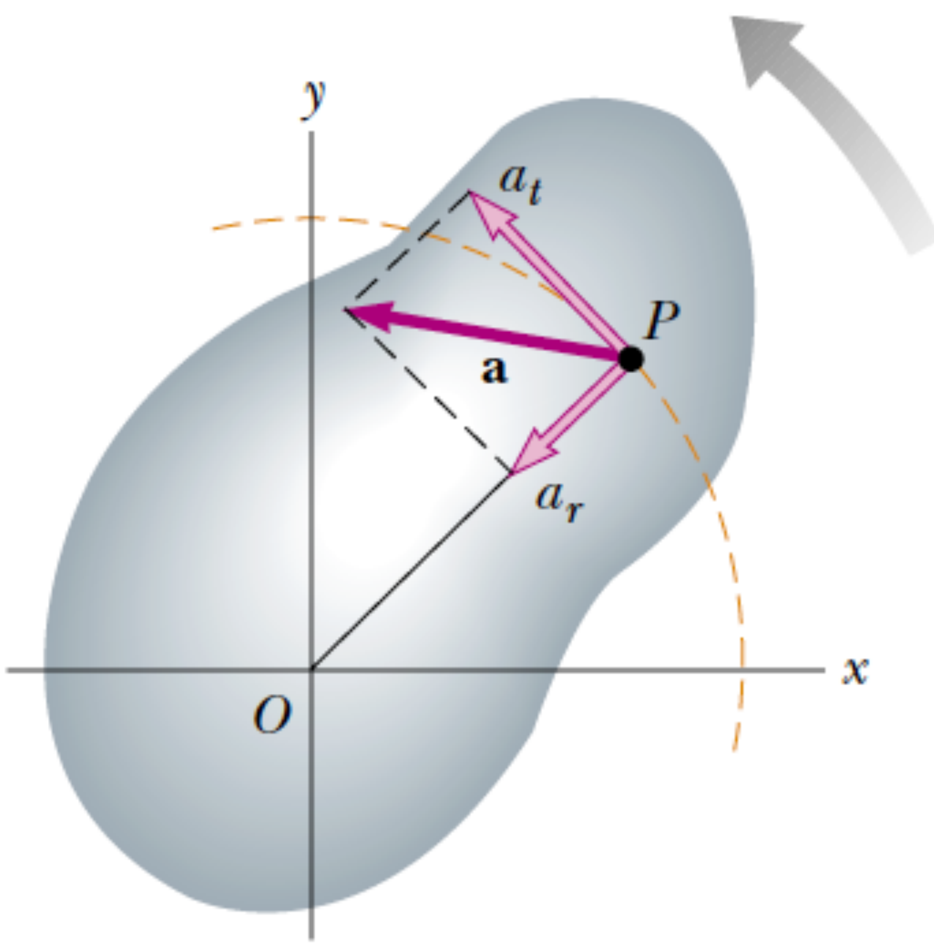
$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

เปรียบเทียบการเคลื่อนที่เชิงเส้นกับเชิงมุม

Kinematic Equations for Rotational and Linear Motion Under Constant Acceleration	
การเคลื่อนที่เชิงมุมรอบจุดหมุน	การเคลื่อนที่เชิงเส้น
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$	$v_f = v_i + at$
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$
${\omega_f}^2 = {\omega_i}^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$	${v_f}^2 = {v_i}^2 + 2a(x_f - x_i)$
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$

©Serway and Jewett

ปริมาณเชิงเส้นและปริมาณเชิงมุม



- อัตราเร็วตามแนวสัมผัส (Tangential speed)

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \boxed{v = r\omega}$$

- อัตราเร่งตามแนวสัมผัส (Tangential acceleration)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

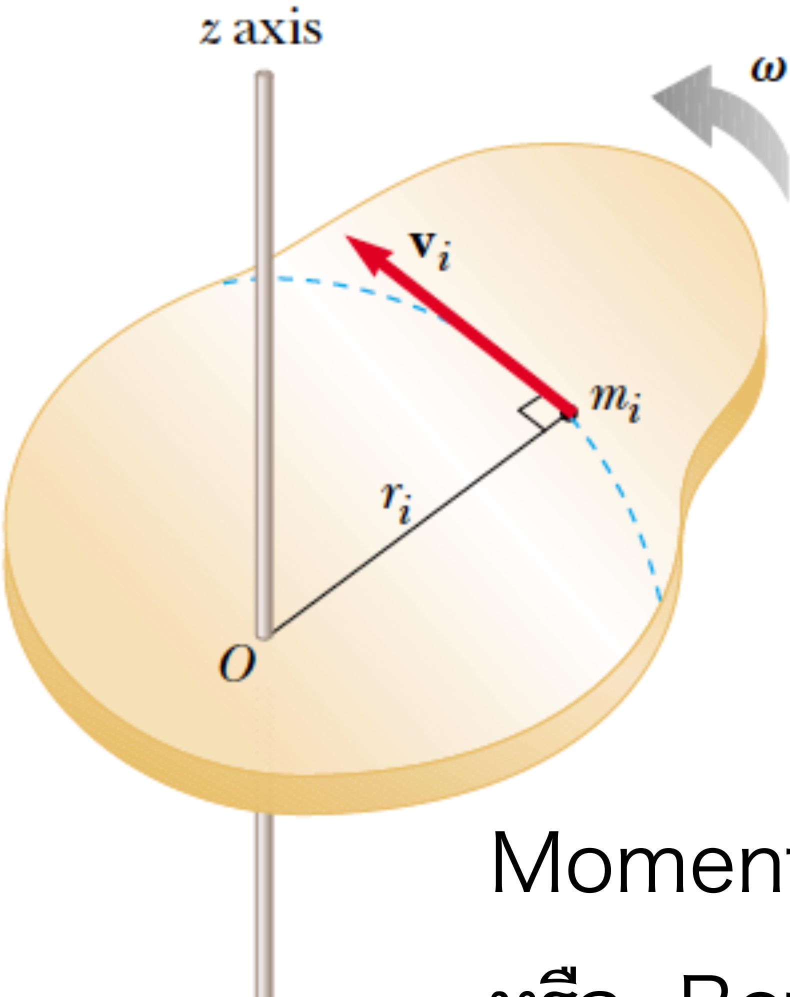
อัตราเร่งสู่ศูนย์กลาง (Centripetal acceleration)

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

พลังงานจลน์ในการหมุน (Rotational Kinetic Energy)

- พิจารณามวลเล็กๆ m_i ที่ความเร็ว v_i



$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega_i^2$$

Moment of Inertia (โมเมนต์ความเฉื่อย)

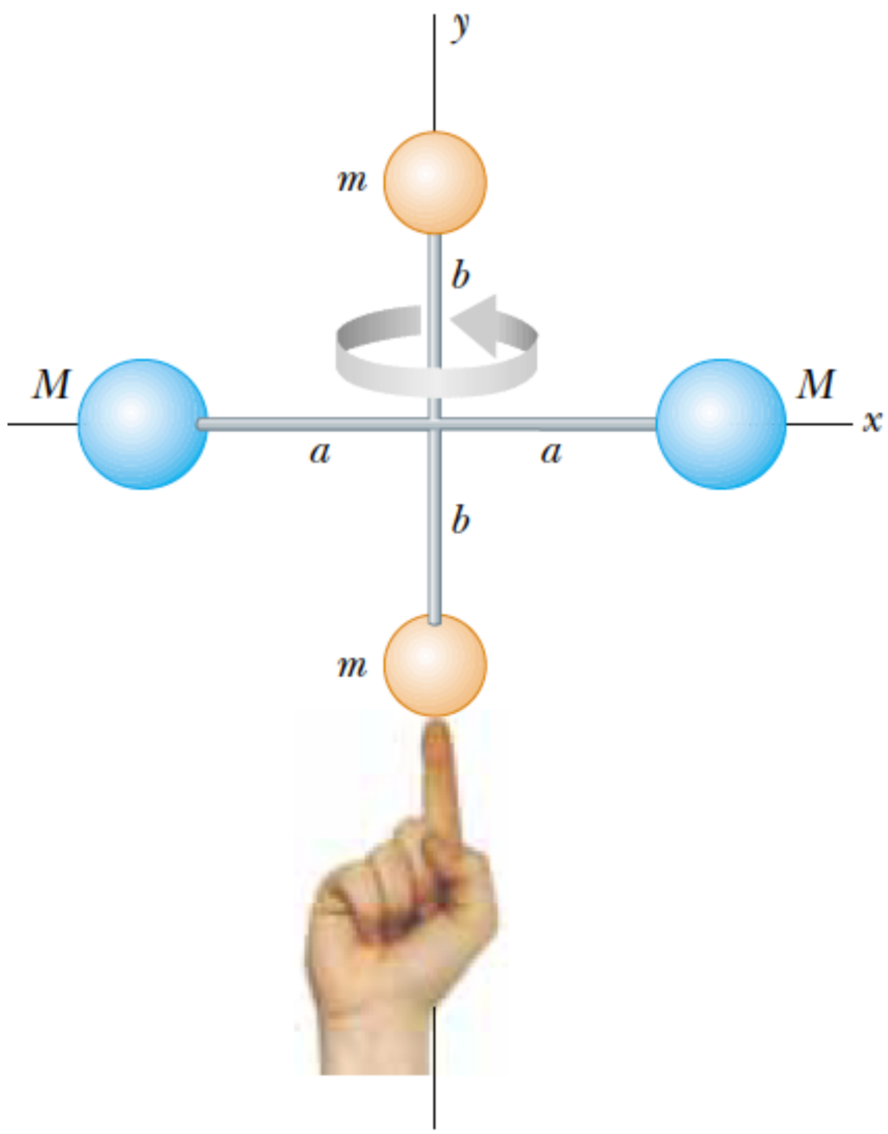
หรือ Rotational Intertia (โมเมนต์การหมุน)

$$\boxed{I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2} \rightarrow \boxed{K_R = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

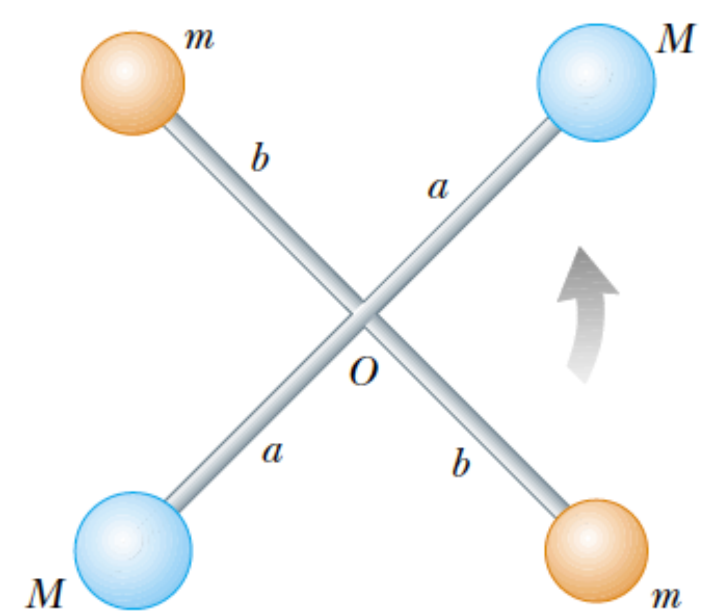
- **<u>ตัวอย่าง</u>** ถ้าเรามีลูกบอลมวล M และ m อย่างละ 2 ก้อนเชื่อมติดกันดังรูปด้านล่าง

1. ถ้าระบบนี้หมุนรอบแกน y ด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยและพลังงานจลน์ในการหมุนรอบแกน y

2. ถ้าระบบนี้หมุนในระนาบ xy รอบแกน z (รูป b) จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยและพลังงานจลน์ในการหมุนรอบแกน z



(a)



(b)

การคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อย

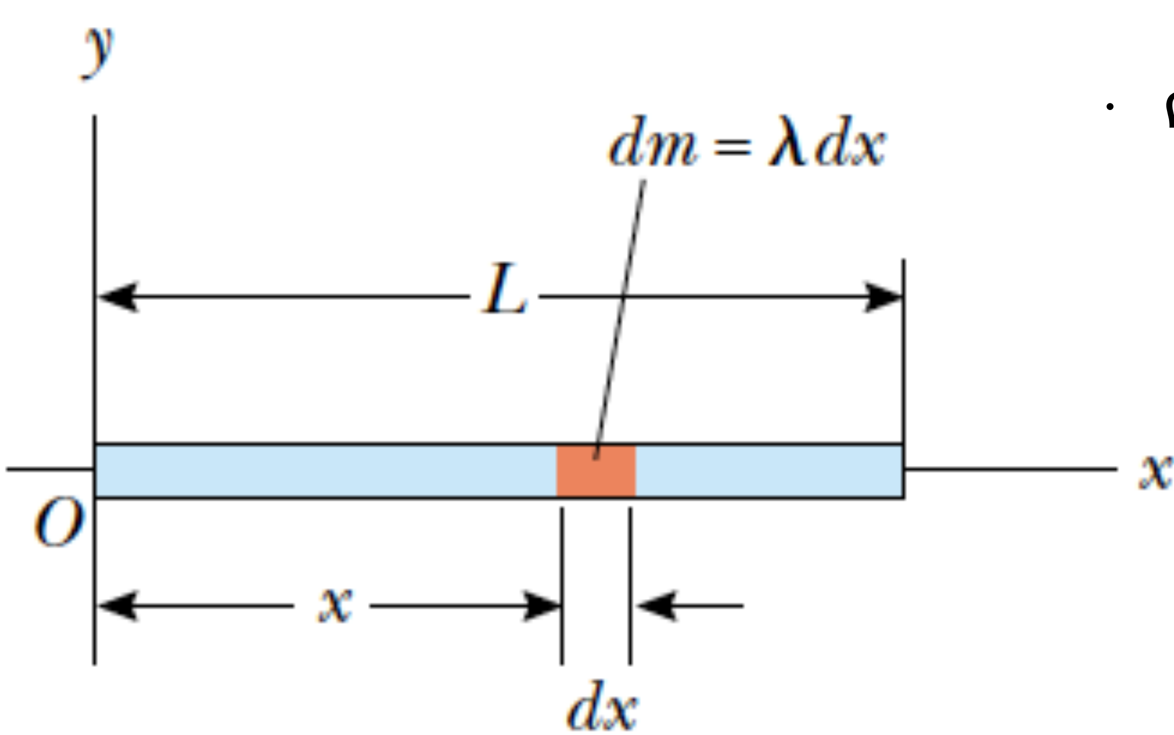
Moment of Inertia (โมเมนต์ความเฉื่อย)

หรือ Rotational Inertia (โมเมนต์การหมุน)

$$\boxed{I \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

r_i คือค่ารัศมีวัดจากมวลถึงจุดหมุน

- **กรณีของวัตถุขนาดใหญ่ (ในหนึ่งมิติ)**

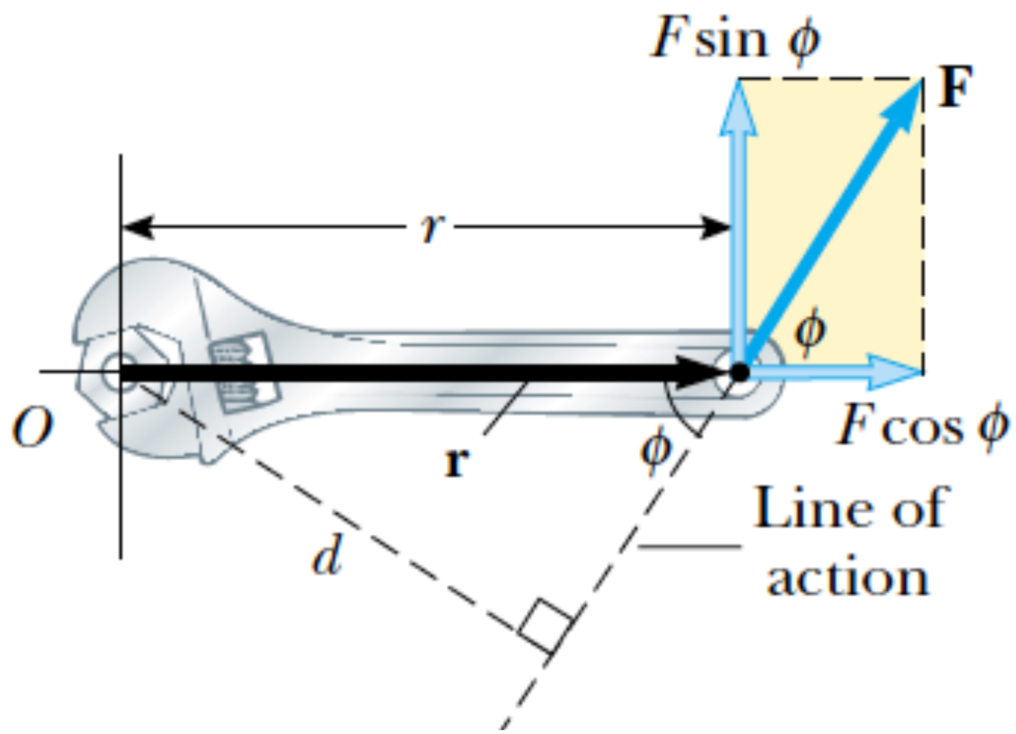


- ตัวอย่างเช่น แท่งเหล็กยาว L (เหมือนตัวอย่างวันอังคาร)

$$M = \int dm = \int \lambda dx$$

$$\boxed{I = \int r_{\perp}^2 \lambda dx}$$

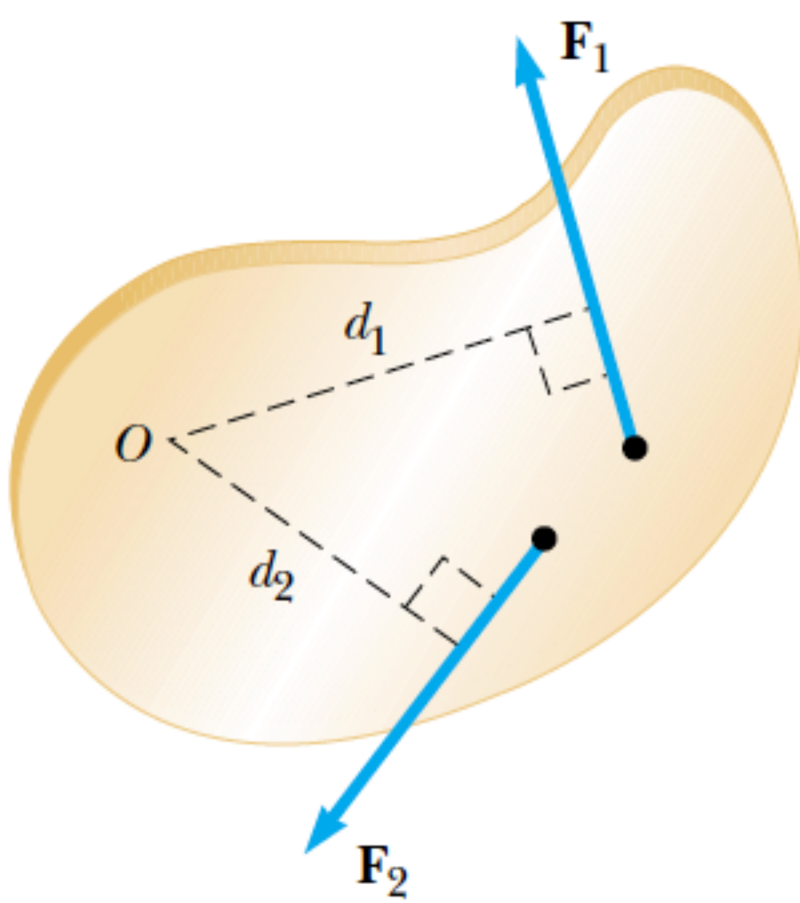
ทอร์ก (Torque)



- ทอร์ก คือ แนวโน้มความสามารถของแรงที่จะหมุนวัตถุรอบจุดหมุน

$$\tau \equiv rF\sin\phi = Fd$$

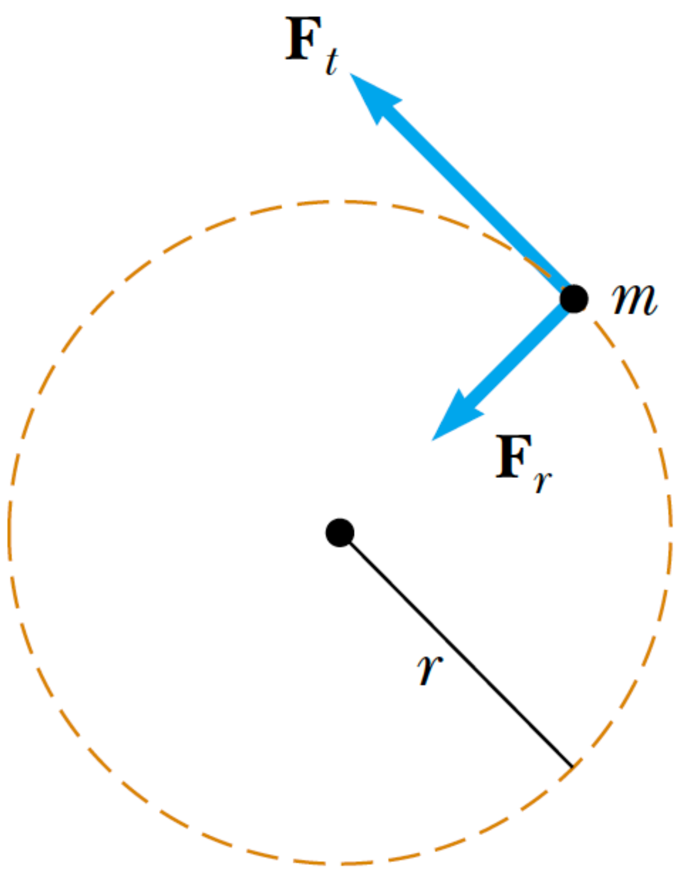
Moment Arm



- ถ้ามีแรงกระทำกับวัตถุมากกว่าหนึ่งแรง

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$

ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์กและอัตราเร่งเชิงมุม



- พิจารณามวล m เคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยรัศมี r
  - จะมีแรงกระทำในแนวสัมผัส (tangential force)

$$F_t = ma_t$$

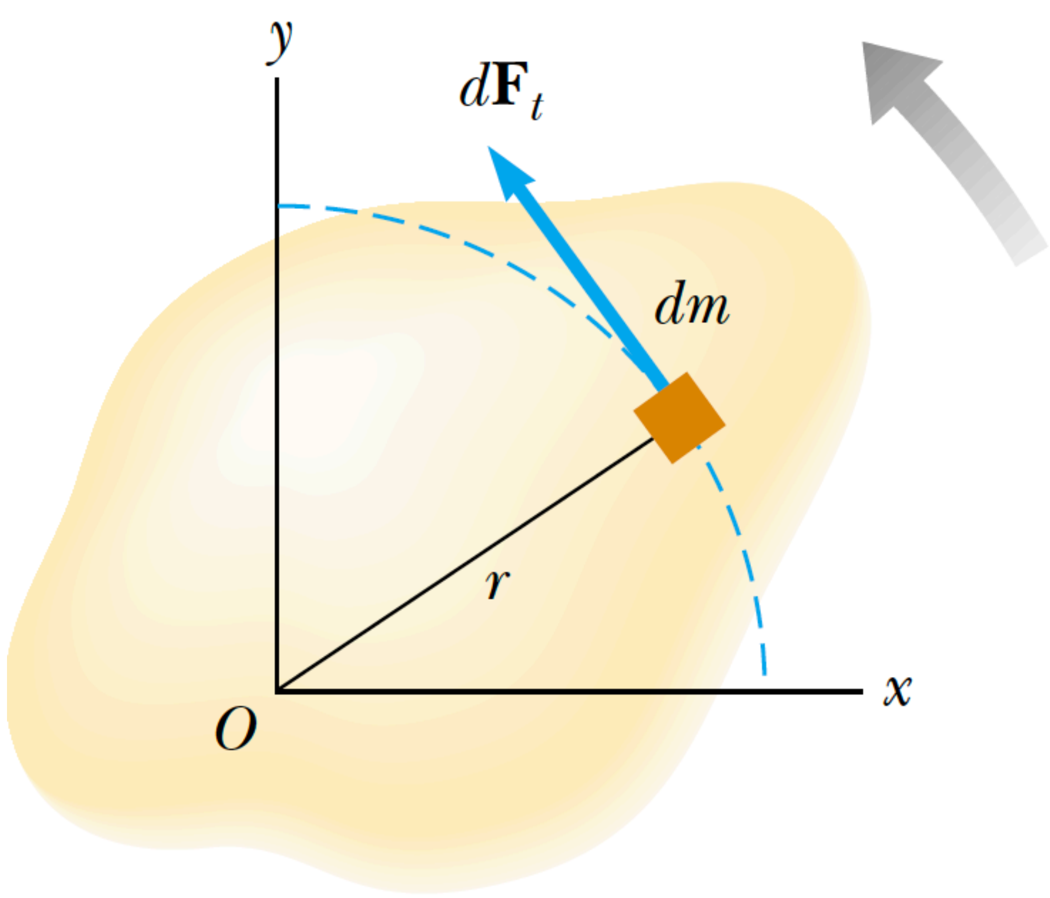
  - ขนาดของทอร์กจะเป็น

$$\tau = F_t r = (ma_t) r$$

$$\tau = (mr\alpha) r = (mr^2)\alpha = I\alpha$$

ทอร์กที่กระทำต่อวัตถุจะเป็นสัดส่วนโดยตรงต่ออัตราเร่งเชิงมุม

ความสัมพันธ์ระหว่างทอร์กและอัตราเร่งเชิงมุม



- ในกรณีของวัตถุขนาดใหญ่

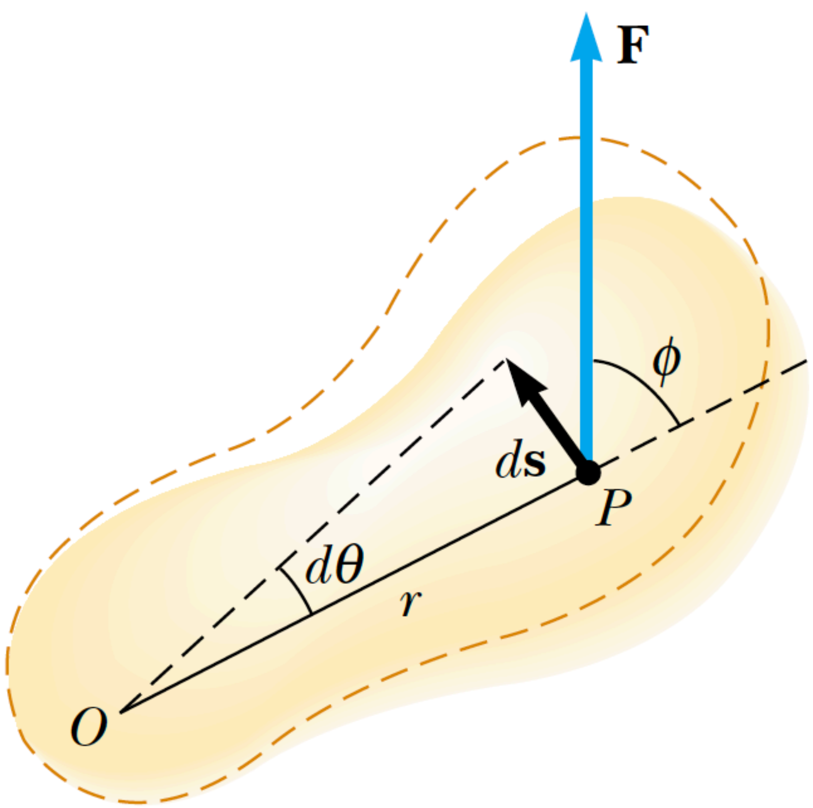
$$dF_t = (dm)a_t$$

$$d\tau = r\,dF_t = a_t r\,dm = \alpha r^2 dm$$

$$\sum \tau = \int d\tau = \alpha \int r^2 dm$$

$$\boxed{\sum \tau = I\alpha}$$

งาน กำลังและพลังงานที่เกิดจากการหมุน



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F\sin\phi)\, r\, d\theta$$

แรงในทิศตั้งฉากกับทิศการเคลื่อนที่จะไม่ทำให้เกิดงาน

- จากที่เรารู้ว่า $\tau = rF\sin\phi$
- จะได้งานเป็น $dW = \tau d\theta$

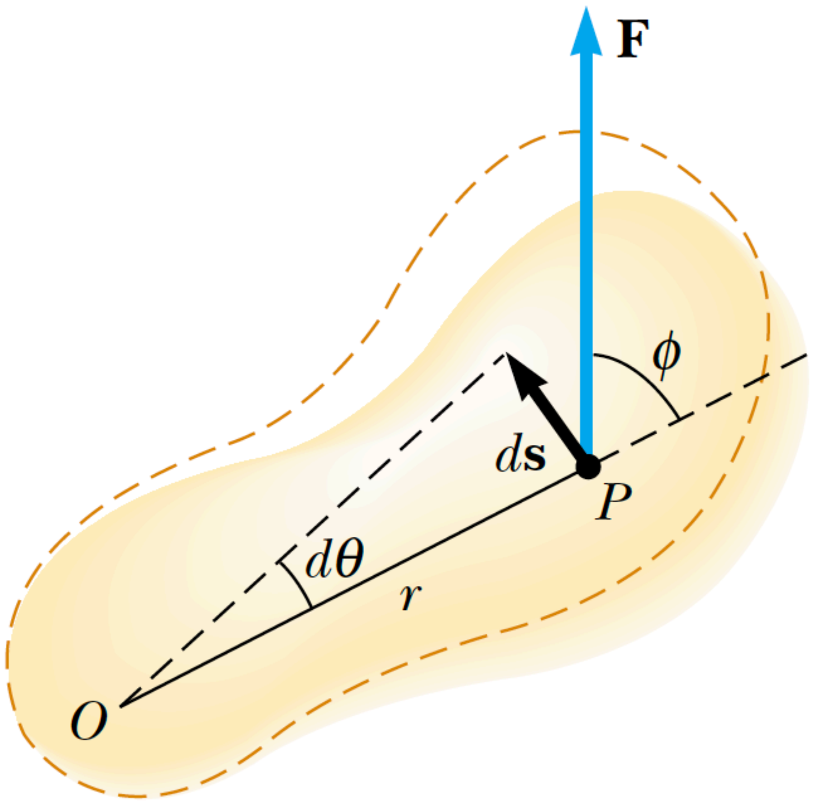
อัตราการได้งานจากแรงที่ทำให้วัตถุหมุนในหนึ่งหน่วยเวลา

เรียกว่า กำลัง (Power)

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

ω

งาน กำลังและพลังงานที่เกิดจากการหมุน



- งานรวม หาได้จาก

$$W = \int dW = \int \tau d\theta$$

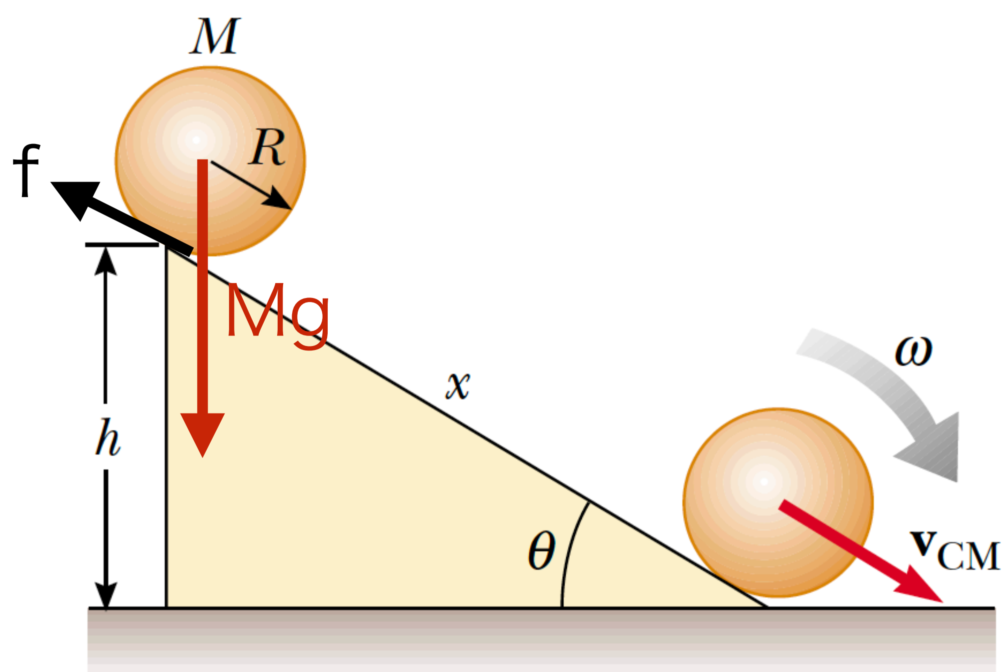
$$\left(\tau = I\alpha,\ \ \alpha = \frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\frac{d\omega}{dt}d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\frac{d\omega}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}d\theta$$

$$\therefore\ W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

งานทั้งหมดที่ทำโดยแรงภายนอกในการหมุนรอบจุดหยุดนิ่ง
มีค่าเท่ากับพลังงานจลน์ในการหมุนที่เปลี่ยนแปลงไป

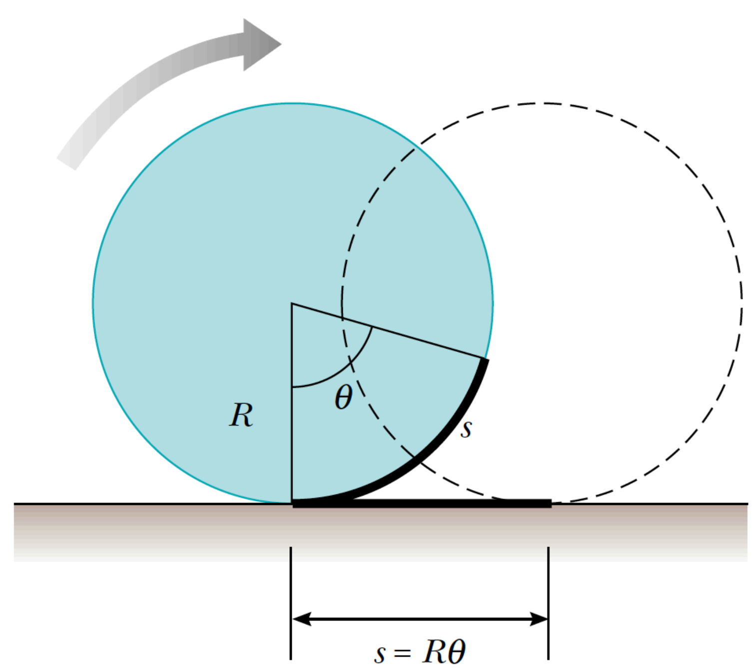
การกลิ้งของวัตถุเกร็ง (Rolling motion of a rigid object)



จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$Mg\sin\theta - f = Ma$$

$$\sum \tau = fR = I\alpha$$

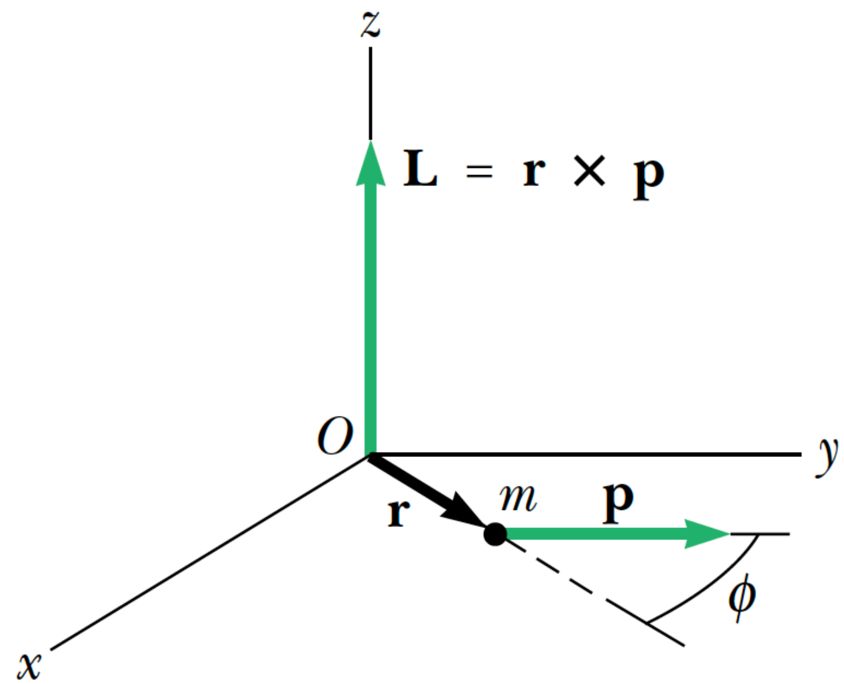


- ในกรณีที่เป็นการกลิ้งแบบไม่ลื่นไถล

$$s = \theta R \rightarrow \Delta s = (\Delta\theta)R$$

$$\boxed{a = \frac{Mg}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}\sin\theta}$$

โมเมนตัมเชิงมุม (Angular Momentum)



$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

ถ้าไม่มีทอร์กภายนอกมากระทำ โมเมนตัมเชิงมุมจะคงที่ หรือที่เรียกว่า กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม

ตัวอย่าง กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม