

การแกว่ง

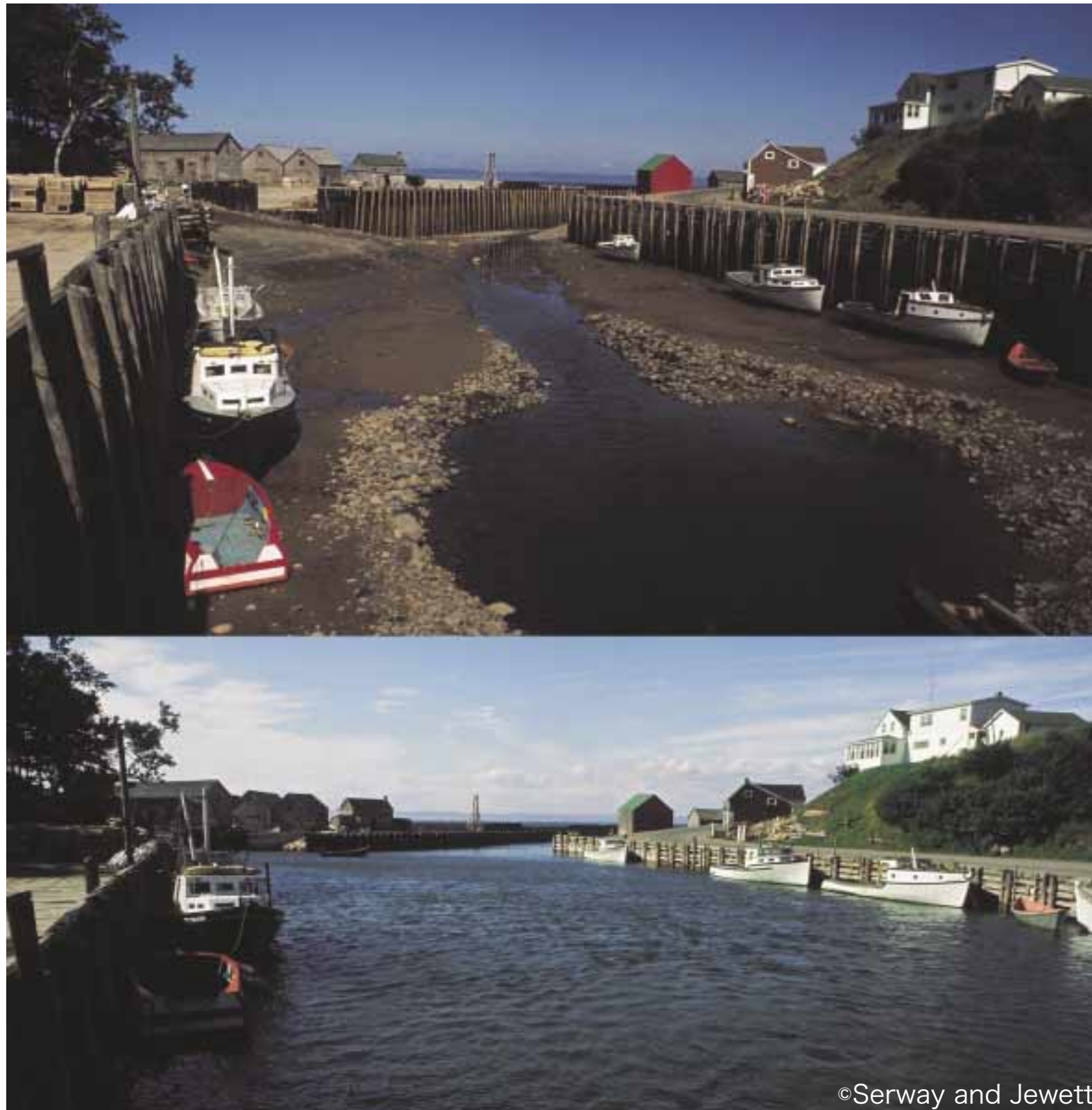


Suraphong Yuma (suraphong.yum@mahidol.ac.th)

Office: P619 (Payathai campus)

Kittiwit Matan (kittiwit.mat@mahidol.ac.th)

Office: P622 (Payathai campus)



น้ำขึ้นน้ำลง ถือเป็นปรากฏการณ์อย่างหนึ่งที่แสดงถึงการสั่น

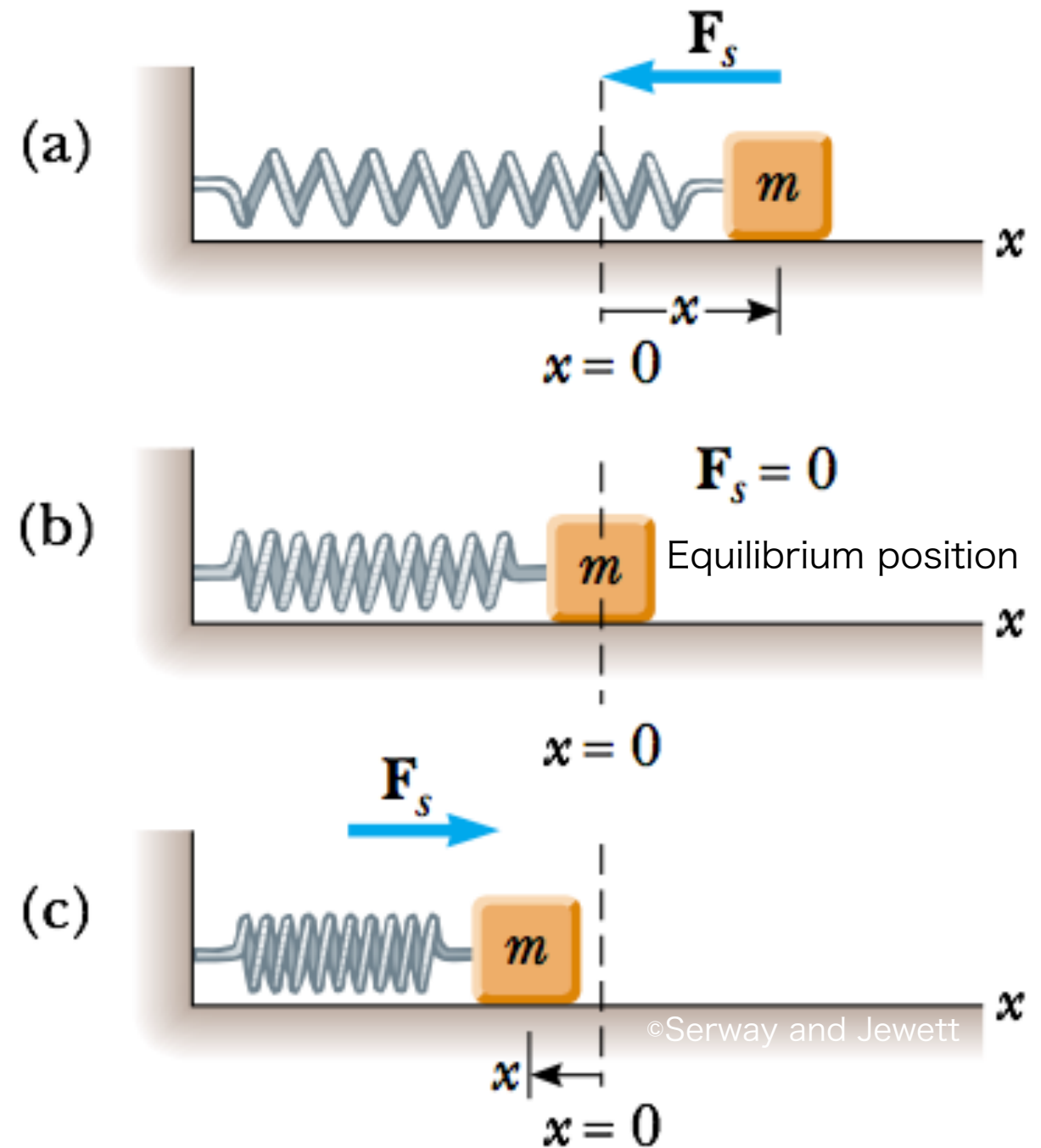
การเคลื่อนที่เป็นรอบๆ (Periodic Motion)

- การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดกับสปริง

- Hook's law:

$$F_s = -kx$$

- It's called a “**restoring force**.”
- จะมีทิศทางพุ่งเข้าสู่สมดุลเสมอ
- ดังนั้น จึงมีทิศตรงข้ามกับระยะทางที่นับจากจุดสมดุล



การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดกับสปริง

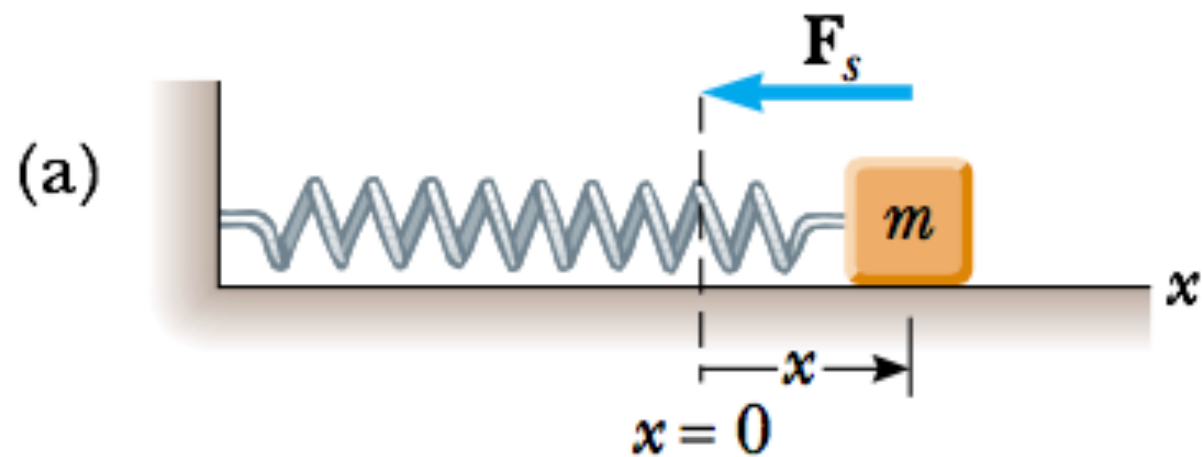
- Newton's 2nd law:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \rightarrow \quad -kx = ma_x$$
$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

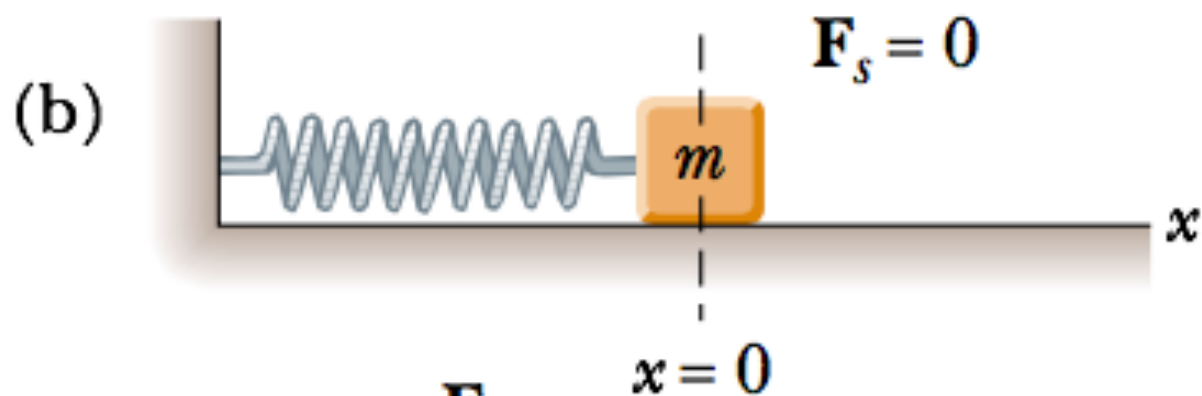
อัตราเร่งมีค่าแปรผกผันกับตำแหน่งของวัตถุ
แต่ทิศของอัตราเร่งจะตรงกันข้ามกับระยะทางของวัตถุที่วัดจากจุดสมดุลเสมอ

Simple Harmonic Motion

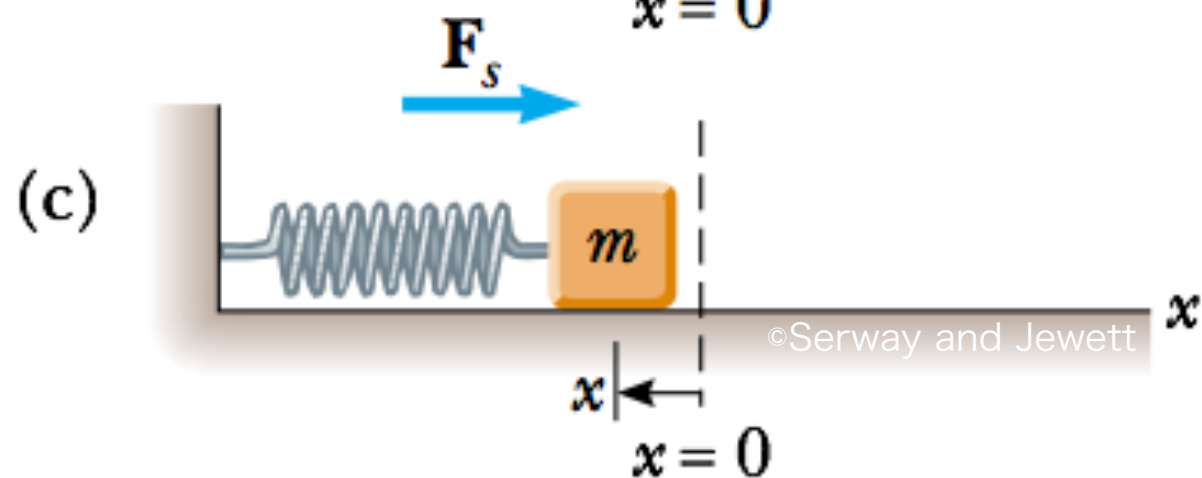
การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดกับสปริง



- ถ้า $x=A$ อยู่นิ่ง
- อัตราเร่งเริ่มต้น คือ $-kA/m$.



- เมื่อวัตถุวิ่งผ่านจุดสมดุล $x=0$
- อัตราเร่งเป็นศูนย์ แต่อัตราเร็วสูงสุด



- ที่ $x=-A$
- อัตราเร่งจะเป็น $+kA/m$.

Simple Harmonic Motion

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x} \quad \left(\omega^2 \equiv \frac{k}{m}\right)$$

- Solution to this equation:

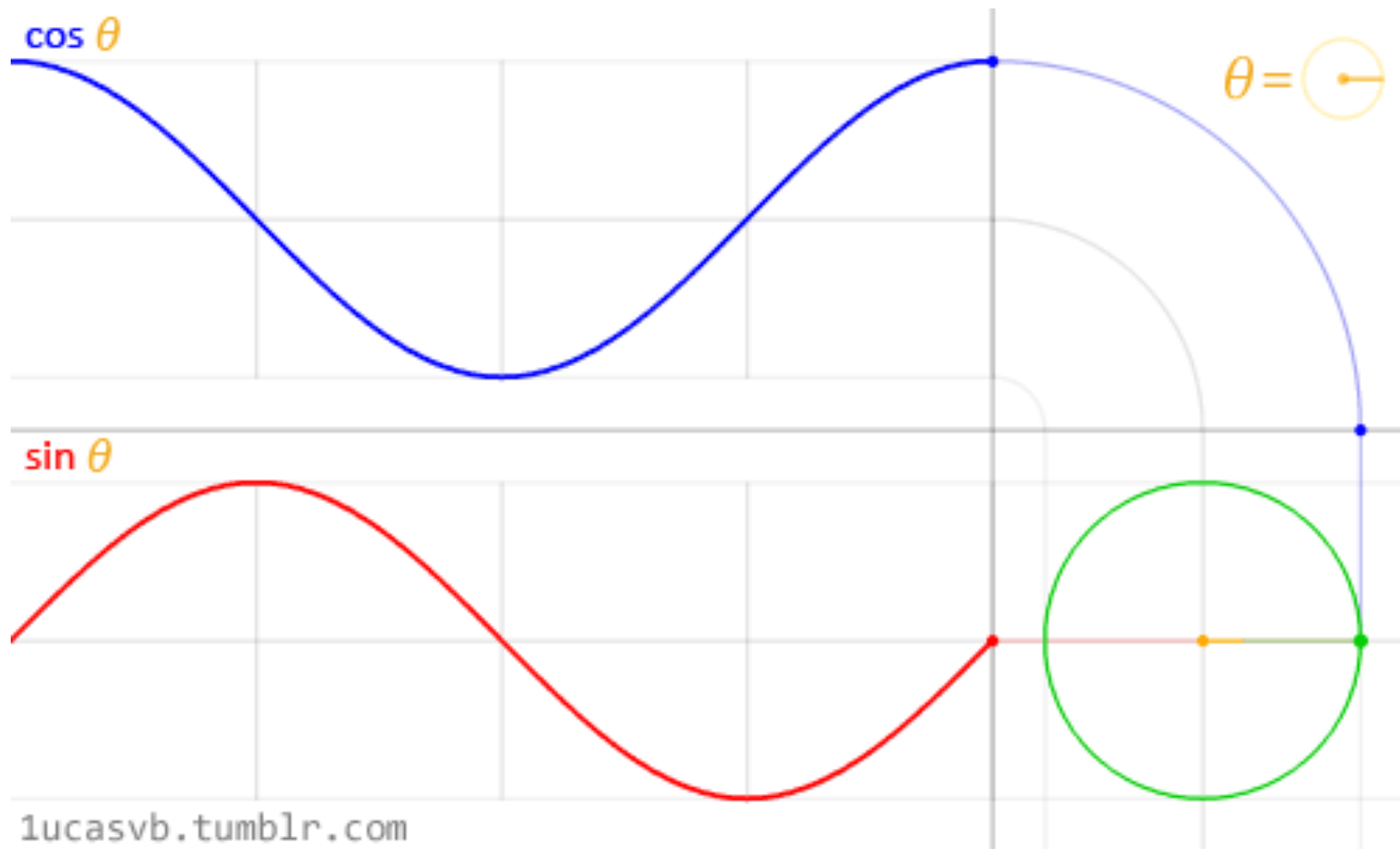
$$x(t) = \underline{A} \cos(\underline{\omega t} + \underline{\phi})$$

constant

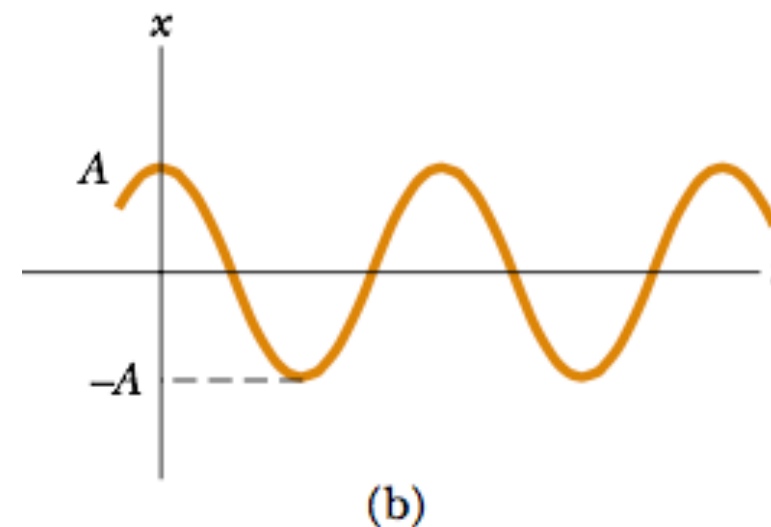
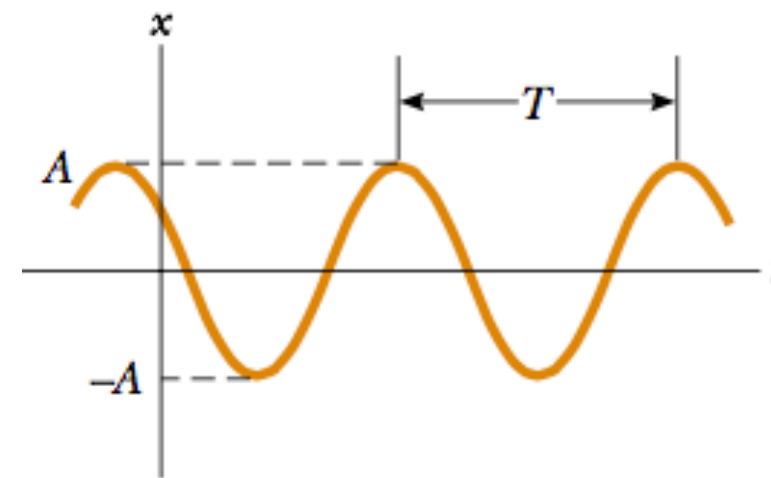
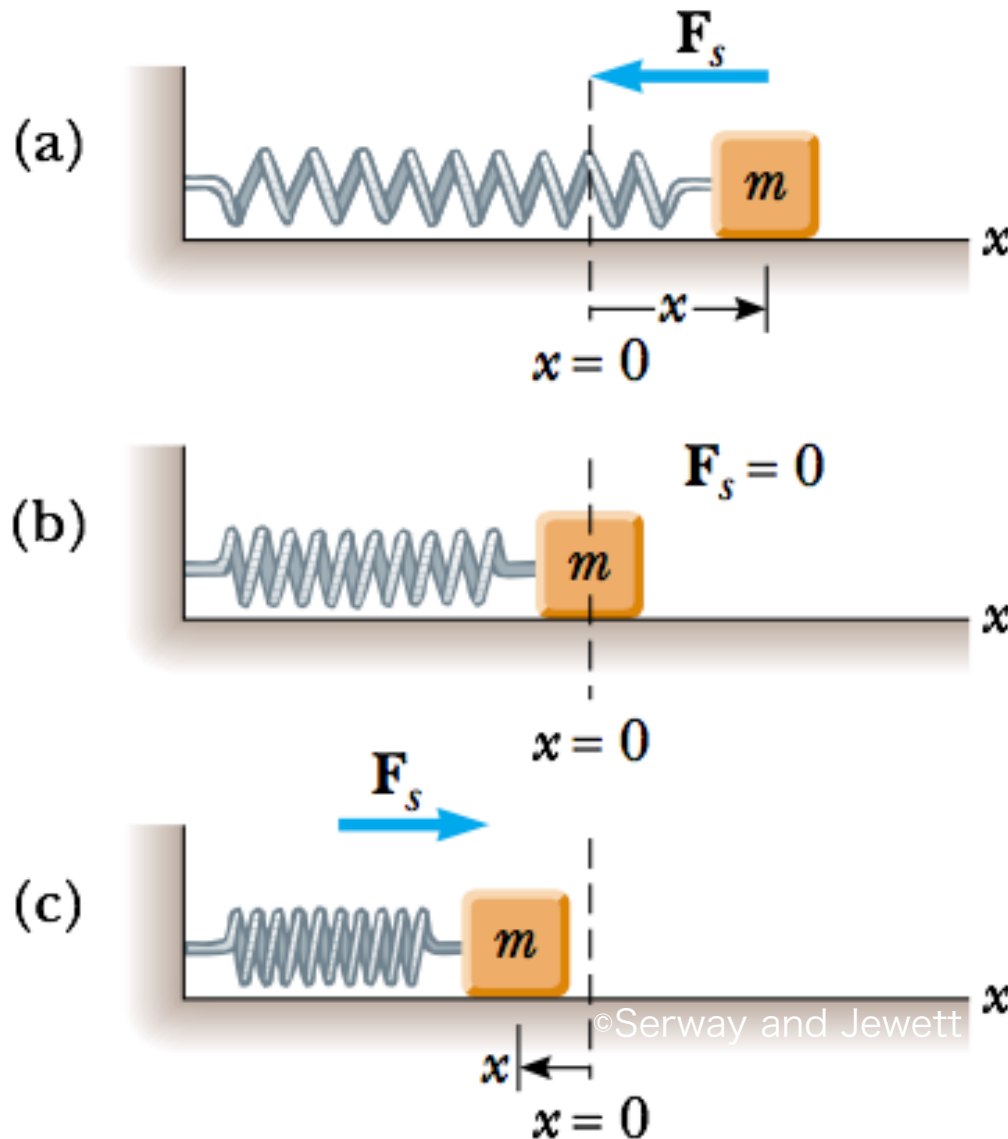
$$\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

The Unit Cycle



Simple Harmonic Motion

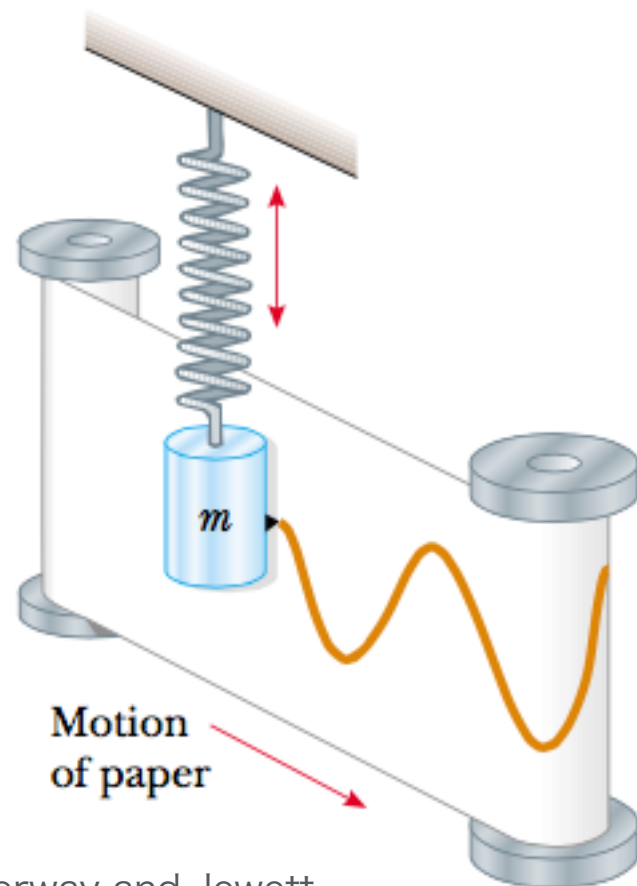


$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

- A is amplitude
- ω is angular frequency (rad/s)
- ϕ is phase constant

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Simple Harmonic Motion



©Serway and Jewett

- คาบการแกว่ง T คือ ช่วงเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ครบ 1 รอบ
- ดังนั้น ค่า x และ v ณ เวลา t จะต้องเท่ากับ ค่า x และ v ณ เวลา $t+T$

$$[\omega(t+T)+\phi]-(\omega t+\phi)=2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

ส่วนกลับของคาบการแกว่ง คือ ความถี่ f (จำนวนรอบในการแกว่งที่วัตถุทำได้ในหนึ่งหน่วยเวลา) มีค่าเป็น

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

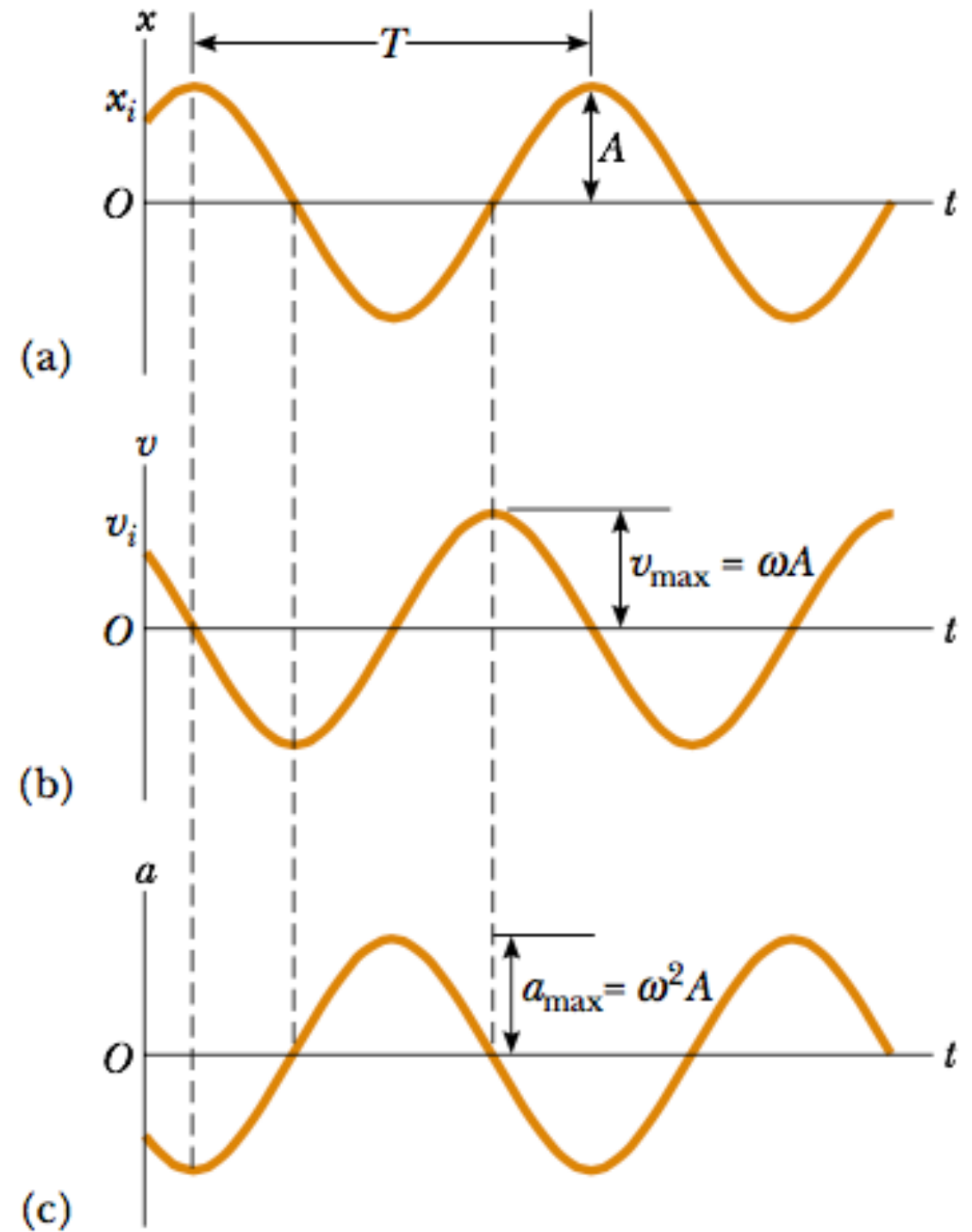
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Simple Harmonic Motion

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$



พลังงานใน Simple Harmonic Motion

- พลังงานจลน์: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

- พลังงานศักย์ยืดหยุ่น:

$$U \equiv \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

พลังงานใน Simple Harmonic Motion

- พลังงานจลน์: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

- พลังงานศักย์ยืดหยุ่น:

$$U \equiv \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

- พลังงานทั้งหมดในระบบ simple harmonic oscillator คือ

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

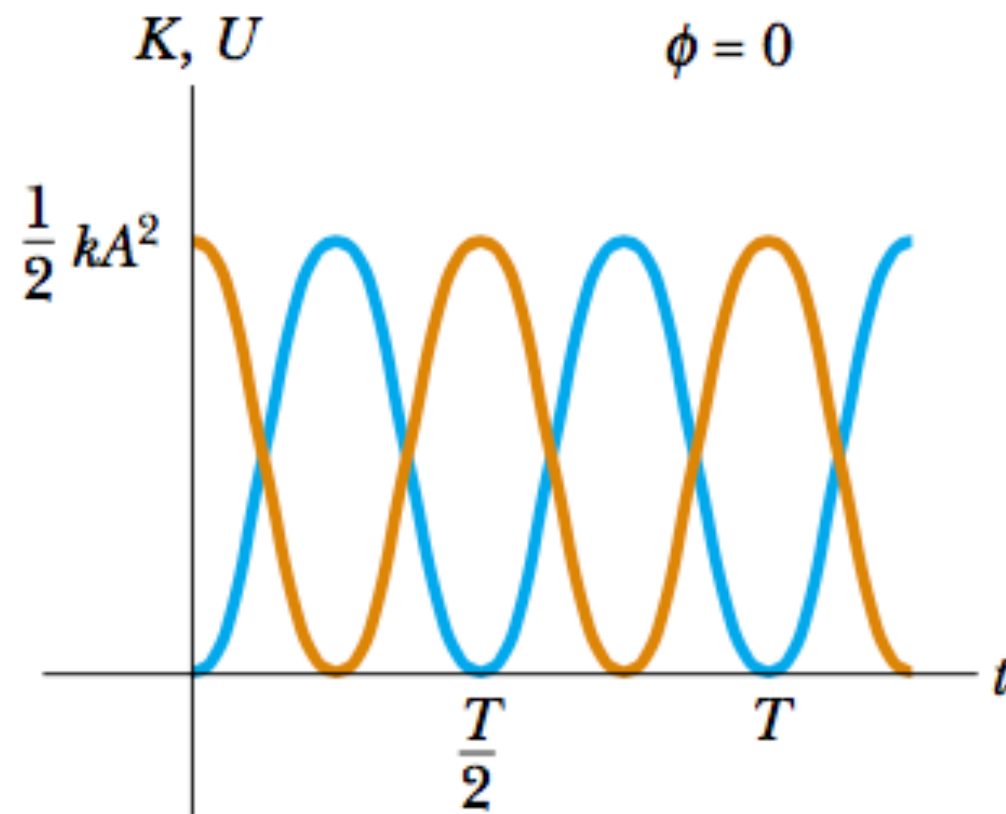
- As $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $E = \frac{1}{2}kA^2$

พลังงานอนุรักษ์

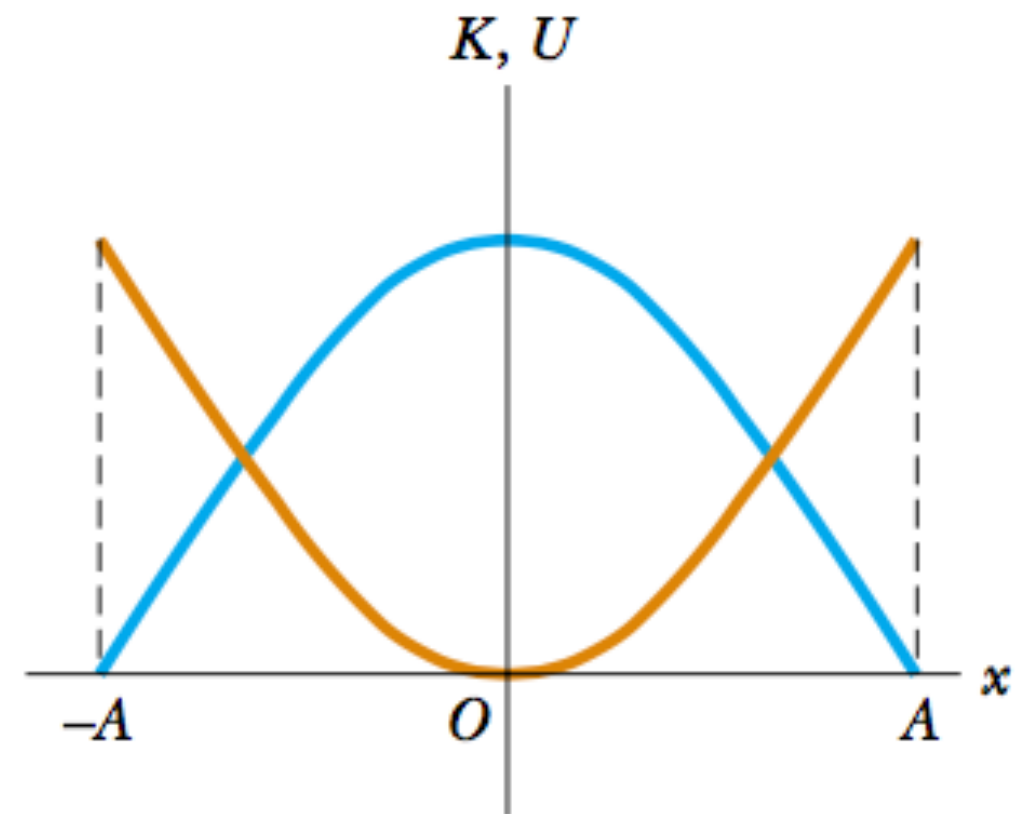
พลังงานใน Simple Harmonic Motion

— U
— K

— $U = \frac{1}{2} kx^2$
— $K = \frac{1}{2} mv^2$



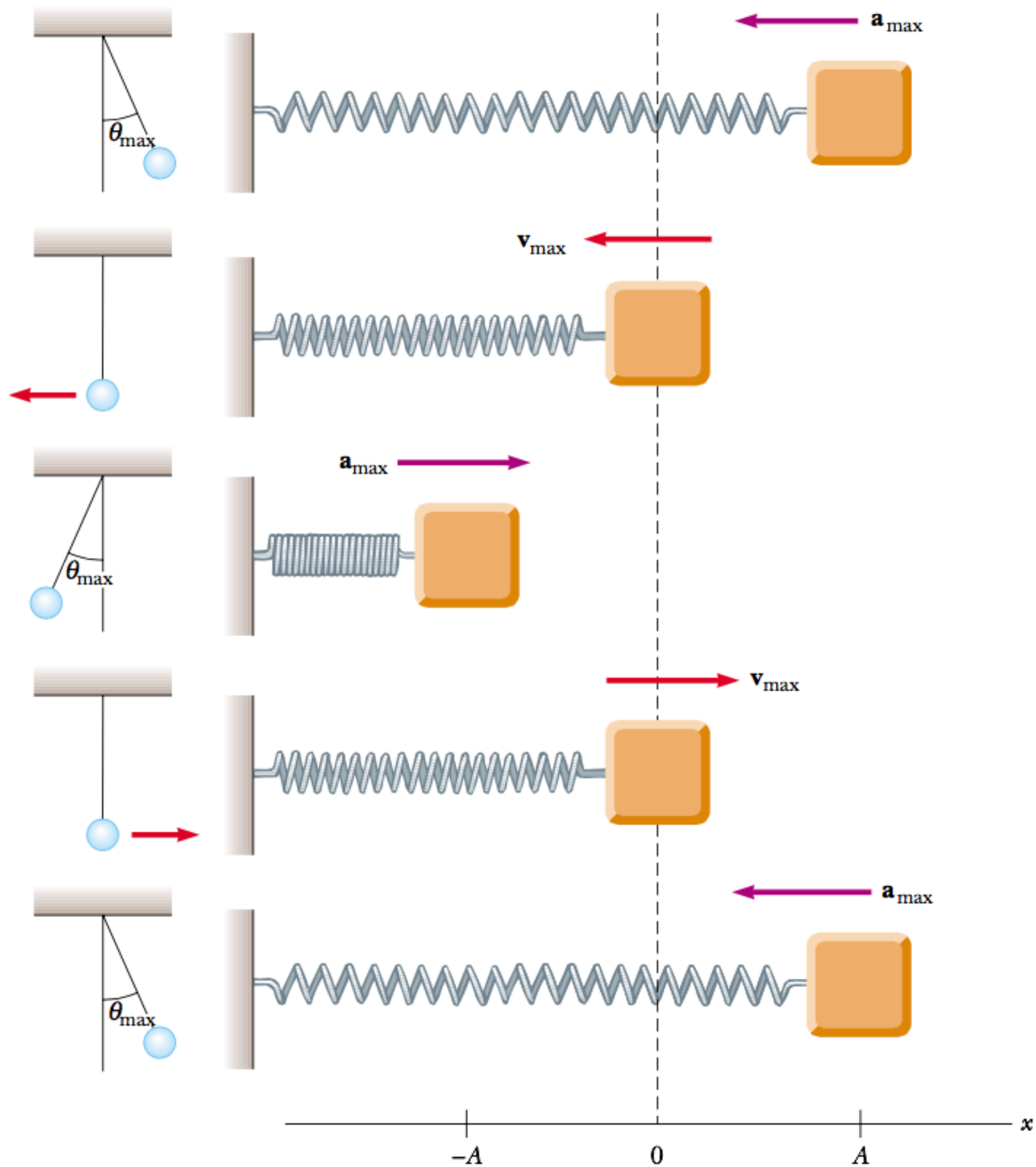
(a)



(b)

$$E = K + U = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2} k A^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$

Damped Oscillations (การแกว่งแบบหน่วง)

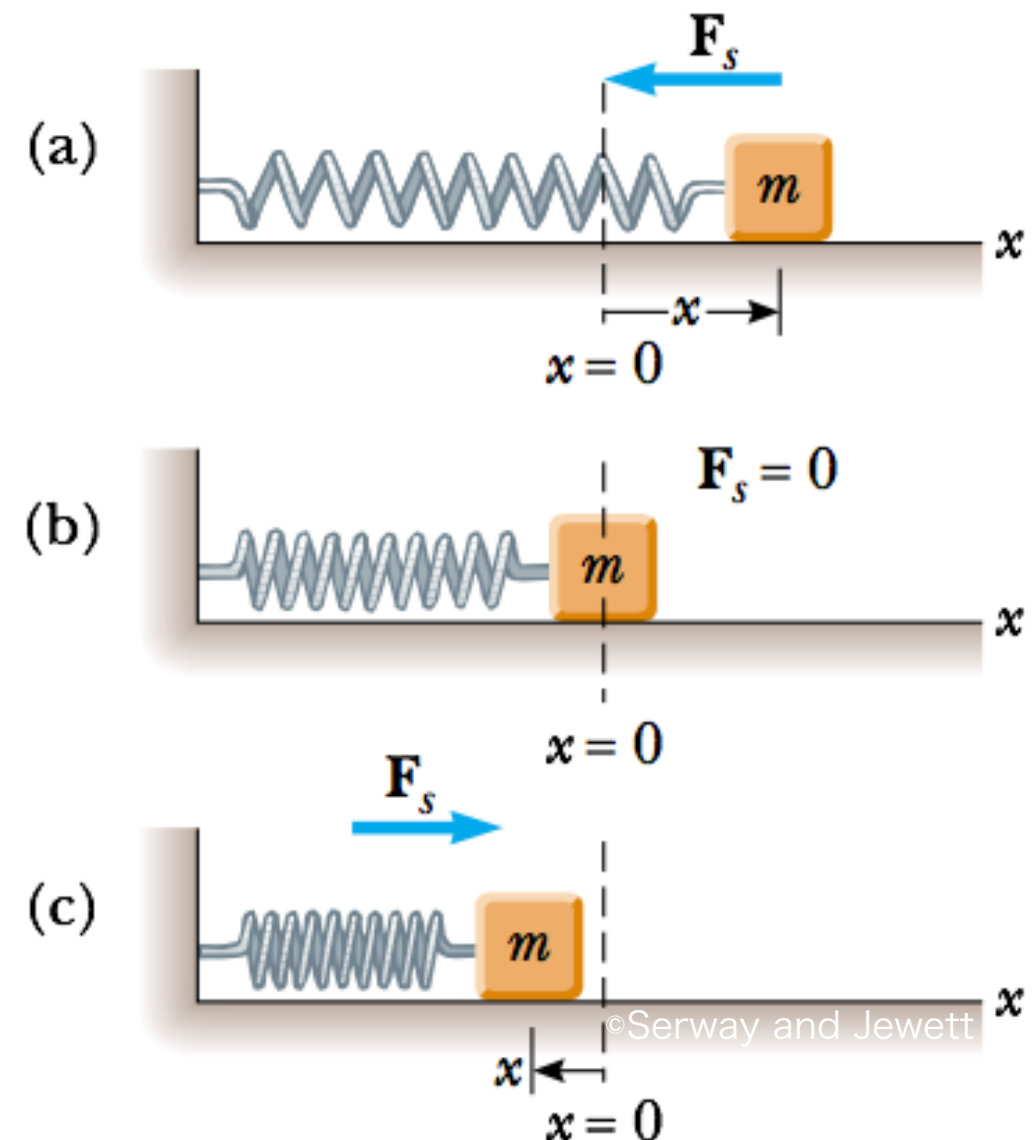
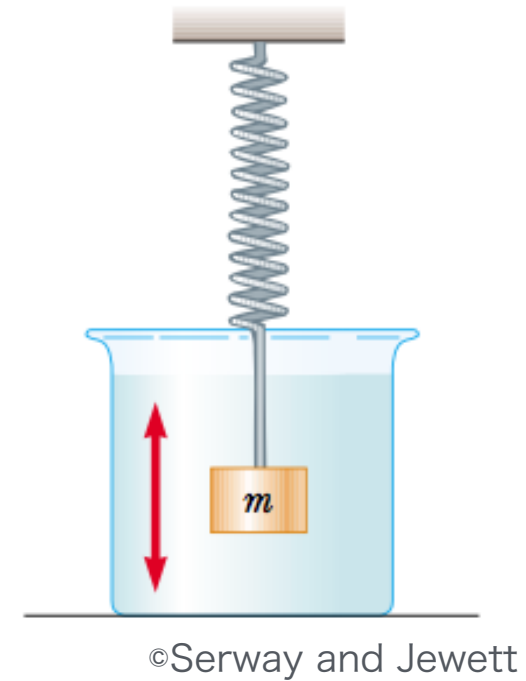
- ในความเป็นจริง จะมีแรงบางอย่างมายับยั้งการแกว่ง
- พลังงานของระบบจะลดลงเรื่อยๆตามเวลาที่มากขึ้น เรียกการแกว่งแบบนี้ว่า การแกว่งแบบหน่วง
- แรงต้านการเคลื่อนที่ R ถูกนิยามเป็น

$$\vec{R} = -b \vec{v}$$

- b คือ ค่าคงที่การหน่วง

$$\Sigma F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$



Damped Oscillations

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- คำตอบของสมการนี้ คือ

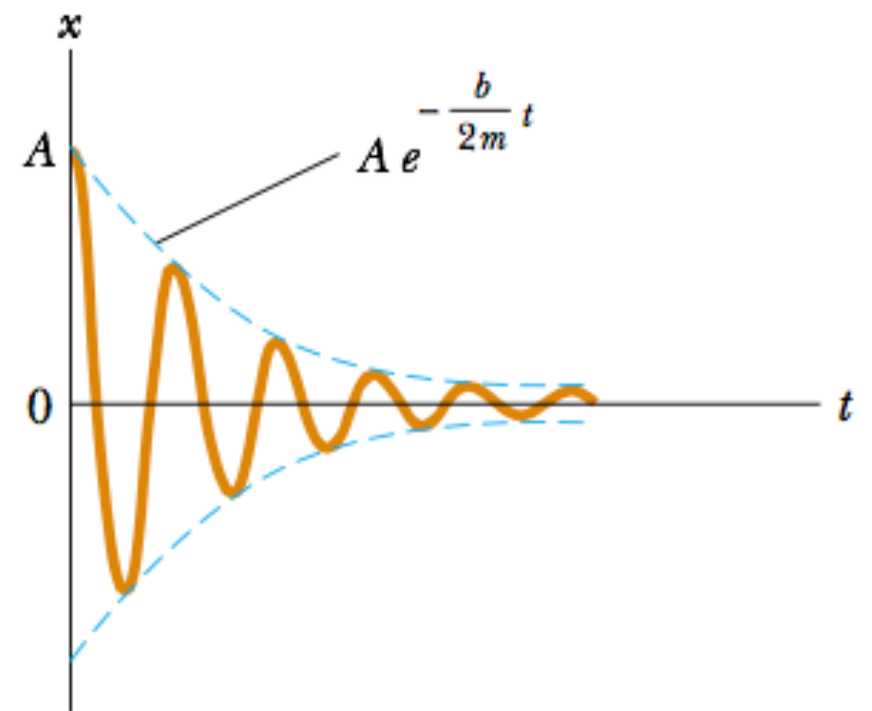
$$x = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

- โดยความถี่เชิงมุม คือ

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

natural frequency

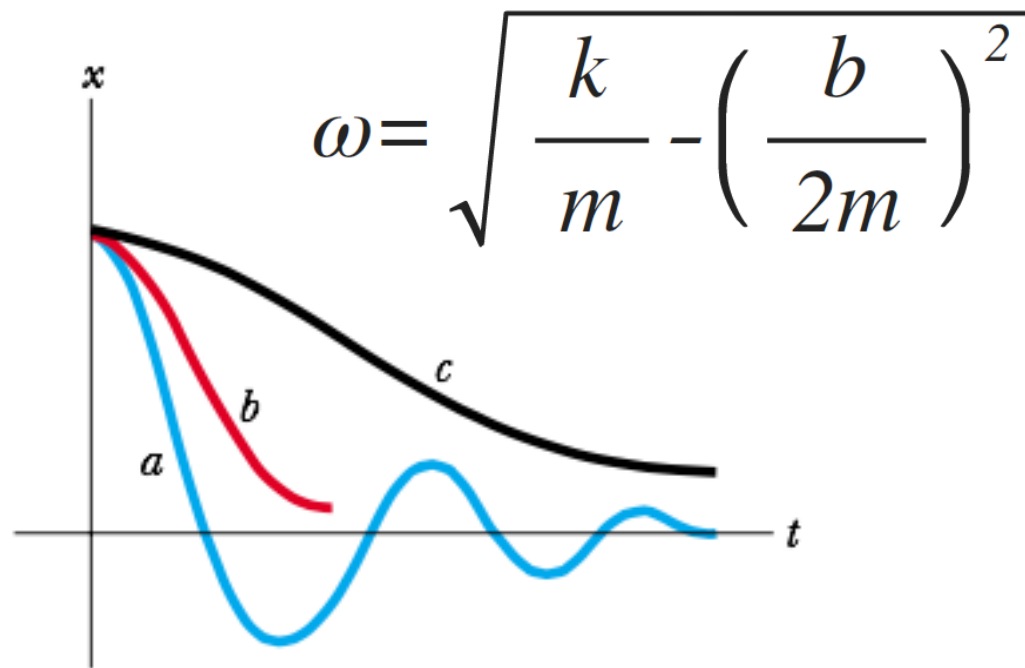


Damped Oscillations

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

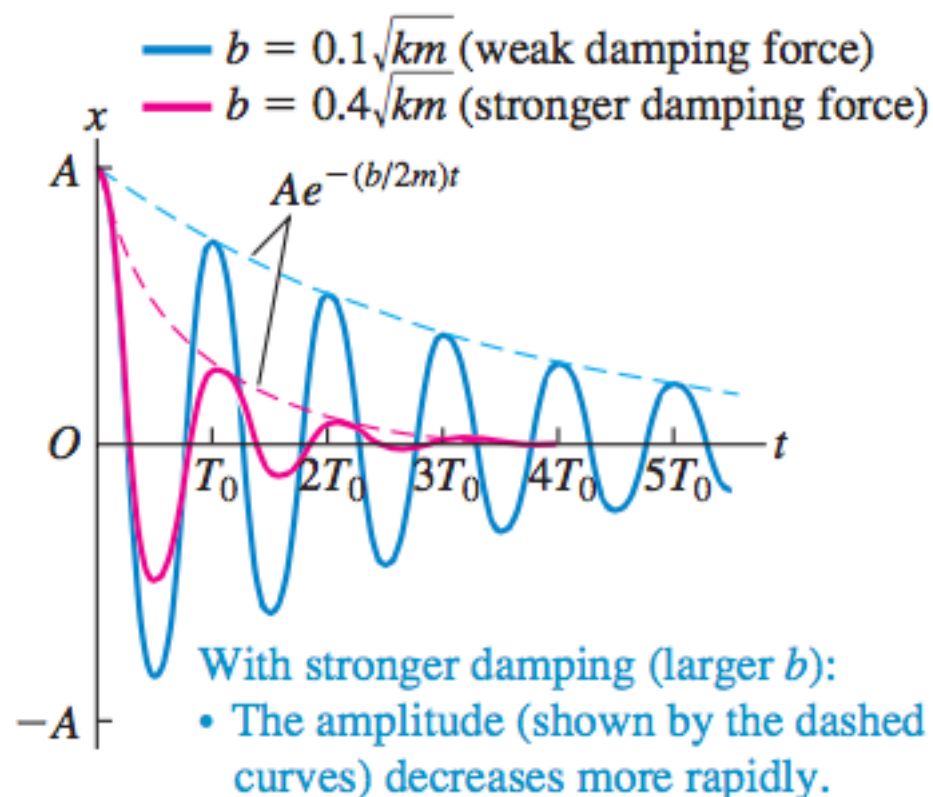
- ความถี่เชิงมุม จะมีค่าเป็น ศูนย์ เมื่อ

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m} = 0 \text{ or } b = 2\sqrt{km}$$



- เงื่อนไขนี้ เราเรียกว่า “critical damping” หรือ การหน่วงแบบวิกฤต

- ระบบจะไม่แกว่งอีกต่อไป แต่วัตถุจะเคลื่อนที่กลับเข้าสู่สมดุลอย่างนุ่มนวลโดยไม่แกว่ง



- ถ้า $b > 2\sqrt{km}$ จะเรียกว่า “overdamping.”

- ไม่มีการแกว่ง ระบบจะเคลื่อนที่เข้าสู่สมดุลช้ากว่าแบบ critical damping.

- ถ้า $b < 2\sqrt{km}$ จะเรียกว่า “underdamping.”

- ระบบจะสั่นด้วยแอมพลิจูดที่ลดลงเรื่อยๆ จนเข้าสู่ศูนย์ในที่สุด

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = mv_x \frac{dv_x}{dt} + kx \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = v_x (ma_x + kx)$$

$$\frac{dE}{dt} = v_x (-bv_x) = -bv_x^2$$

ในกรณีของการแกว่งแบบหน่วงนั้น พลังงานจะไม่อนุรักษ์!
พลังงานรวมของระบบจะลดลงเรื่อยๆ ทุกๆรอบการแกว่ง

Forced oscillations

- ถ้าเราใส่แรงเข้าไปช่วยในการแกว่งอย่างสม่ำเสมอ จะเรียกการแกว่งแบบนี้ว่า “forced oscillation”

$$\Sigma F = ma \quad \rightarrow \quad F_0 \sin \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

External force Retarding force Restoring force

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

