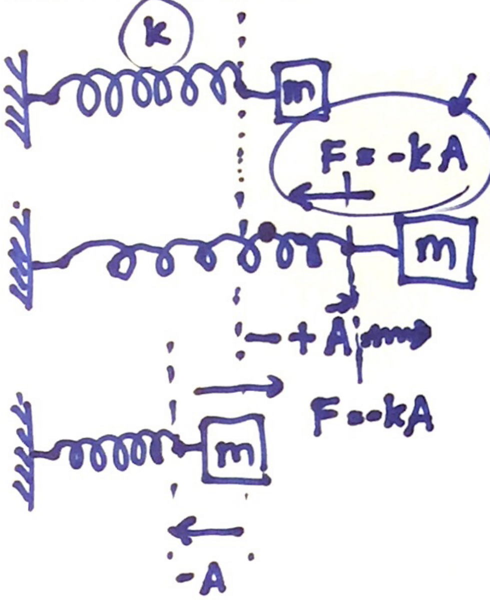
เรื่องการสั่น Oscillation (Simple harmonic Oscillation)

การเคลื่อนที่สปริง



แรงคืนกลับ restoring force

ปริมาณสำคัญ

- amplitude
- cycle (รอบ) 1 วินาที เคลื่อนที่ได้กี่รอบ
- period (คาบ) T

  1 รอบ ใช้เวลากี่วินาที
- ความถี่ (frequency) f

$f = \frac{1}{T}$ $\quad T = \frac{1}{f}$

หาสมการการเคลื่อนที่

ระยะใดๆ วัดจากจุดสมดุล

restoring force $F = -kx$

ต้องการหา $\underline{\underline{x(t)}} = ?$

กฎข้อที่ 2 ของ Newton $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

สมการการเคลื่อนที่ของสปริง.

$x(t) = e^{at}$ $\quad \frac{dx}{dt} = ae^{at}$ $\quad \frac{d^2x}{dt^2} = a^2e^{at}$

หา $x(t) = ?$

ให้ $x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ คำตอบทั่วไป

$$\frac{dx}{dt} = A\left(-\sin(\omega t + \theta)\right)\omega = -\omega A \sin(\omega t + \theta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \cos(\omega t + \theta)\,\omega = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta)$$

จากสมการการเคลื่อนที่

$$-\omega^2 \cancel{A\cos(\omega t + \theta)} + \frac{k}{m}\cancel{A\cos(\omega t + \theta)} = 0$$

$$-\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

General Solution

มุมนี้เรียกว่า phase ของการสั่น.

$$x(t) = A\cos(\overbrace{\omega t + \theta}) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$x(t)$: การกระจัด displacement

A: amplitude

$\omega t + \theta$: ϕ

θ: initial phase. หรือเป็น phase ที่ $t = 0$

ω: ความถี่เชิงมุม

สำหรับฟังก์ชัน cos ถ้า $\Delta\phi = 2\pi$ cos ก็จะกลับมาที่จุดเดิม.

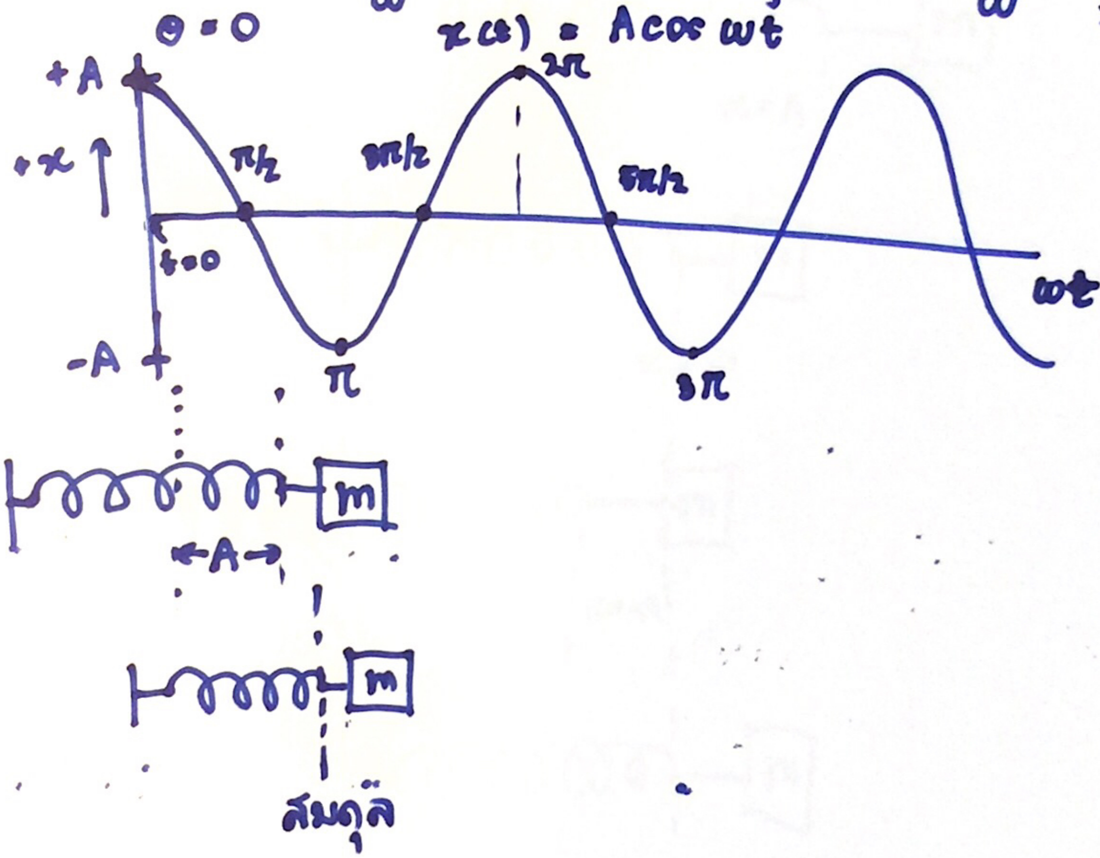
ถ้า $\Delta\phi = 2\pi$ การสั่นผ่านไป 1 คาบ.

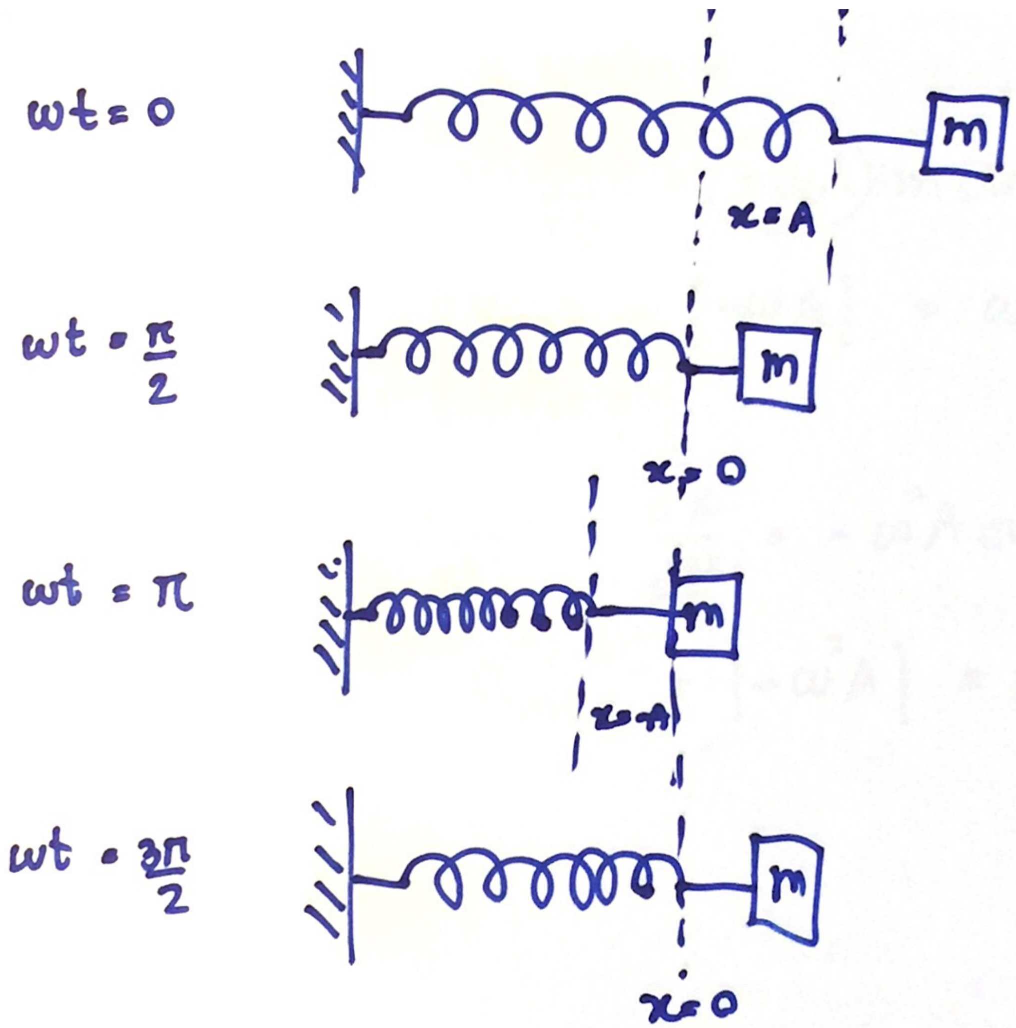
จาก $t \longrightarrow t + T$; คาบการสั่น ให้ $\phi(t) = \omega t + \theta$

$$\Delta\phi = \phi(t+T) - \phi(t) = (\cancel{\omega t} + \omega T + \cancel{\theta}) - (\cancel{\omega t} + \cancel{\theta})$$

$$= \omega T \implies \omega T = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \; ; T = \frac{1}{f}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ และ $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \Rightarrow \omega = 2\pi f$





ωt = 0
x = A
m
ωt = π/2
x = 0
m
ωt = π
x = -A
m
ωt = 3π/2
x = 0
m

หาความเร็วของ m ณ เวลาใดๆ

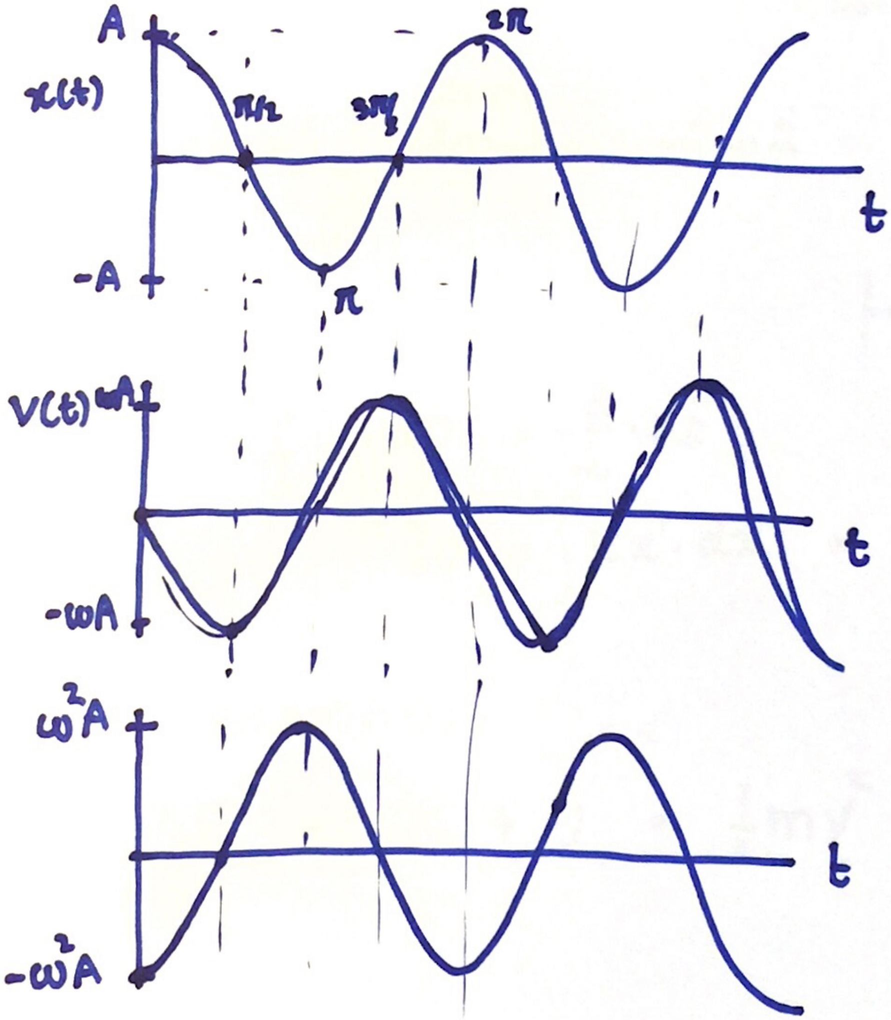
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \theta)$$

$$v_{max} = |-\omega A| = \omega A$$

หาความเร่ง ณ เวลาใดๆ

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \theta)$$

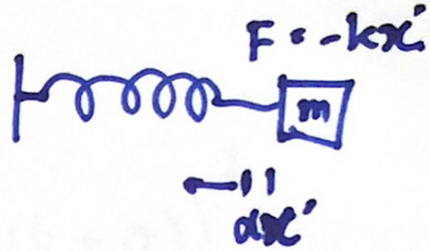
$$a_{max} = |-\omega^2 A| = \omega^2 A$$


A
x(t)
π/2
3π/2
2π
-A
π
t
V(t)
ωA
-ωA
t
$\omega^2 A$
$-\omega^2 A$
t

พลังงานของสปริง.

- พลังงานจลน์ ~~เกิดจาก~~ มาจาก การเคลื่อนที่ $K = \frac{1}{2}mv^2$
- พลังงานศักย์

หาพลังงานศักย์.



$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

$$U = \int dU = \int_0^x kx' \cdot dx' = \frac{1}{2}kx^2$$

พลังงานรวมของสปริง

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

พลังงานจลน์ของสปริง

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(-\omega A \sin(\omega t + \theta)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \theta)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(A\cos(\omega t + \theta)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \theta)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}\overset{k}{m\omega^2}A^2\sin^2(\omega t + \theta) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \theta)$$

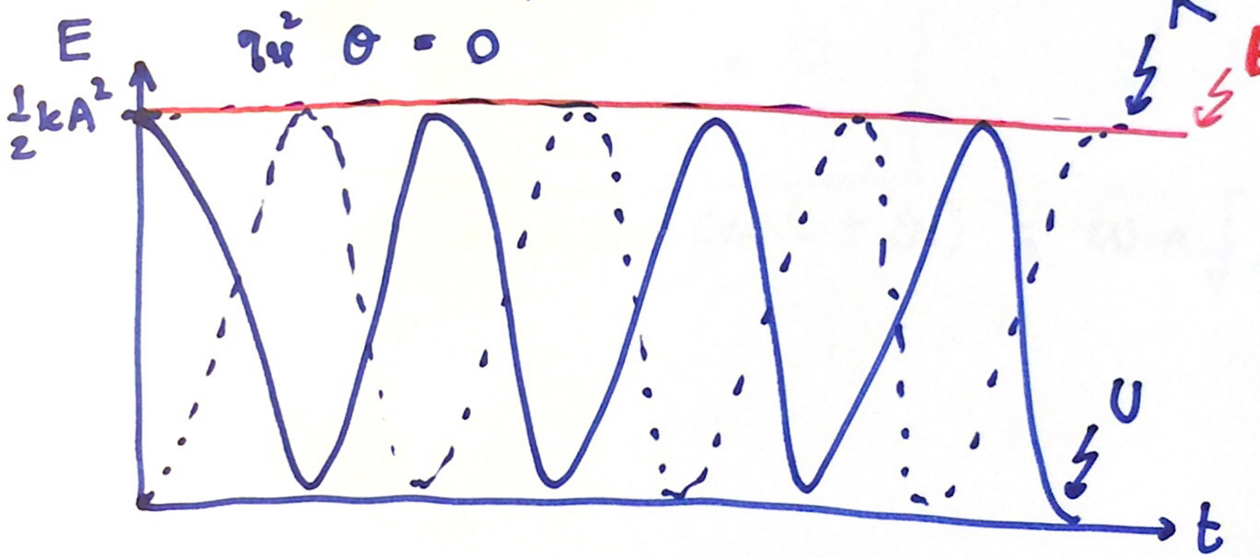
จาก $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m\omega^2 = k$

$$E = \frac{1}{2}kA^2\left(\sin^2(\underbrace{\omega t+\theta}_{\phi}) + \cos^2(\underbrace{\omega t+\theta}_{\phi})\right)$$

$E = \frac{1}{2}kA^2$ ซึ่งไม่ขึ้นกับเวลา.

=> ระบบมีการอนุรักษ์พลังงาน.

ให้ $\theta = 0$



มุม (rad) ค่า sin

0.1 rad 6° $\sin 0.1 = 0.0998 \approx \theta$ 0.2%

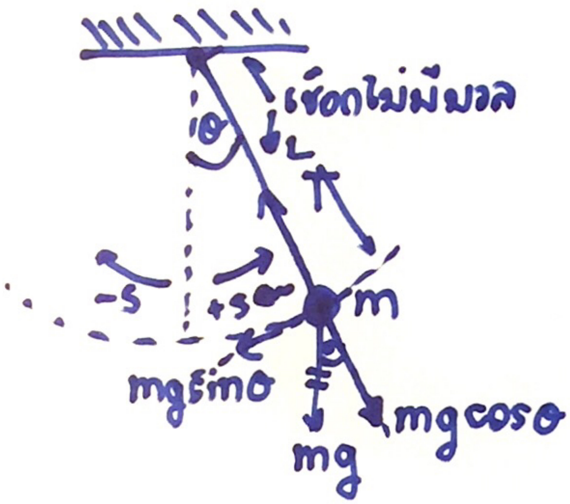
0.2 rad 11° $\sin 0.2 = 0.1987 \sim \theta$ 0.65%

ถ้ามุม θ น้อยๆ $\Rightarrow$ $\sin\theta \sim \theta = \frac{s}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{L}s = 0}$$

$$s(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \; ; \; \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

การแกว่ง : ลูกตุ้มอย่างง่าย (Simple pendulum).



จาก $\Sigma F_T = 0 \Rightarrow T = mg\cos\theta$

$$\Sigma F_s = ma$$

$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}\frac{d^2s}{dt^2}$$

แรงดึงกลับ

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\sin\theta = 0$$

$$\theta = \frac{s}{L}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$