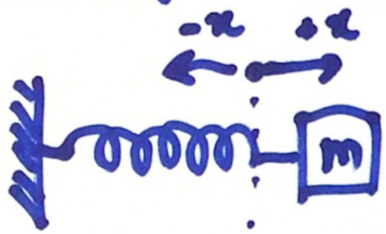
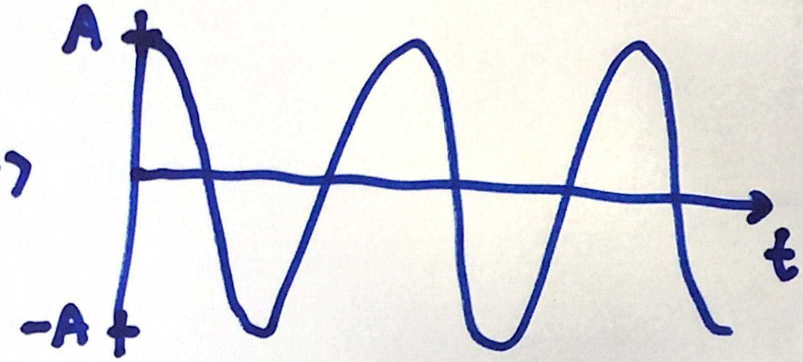
$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$

การสั่น



$\Rightarrow$



สมการการเคลื่อนที่

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$ ⇐ ไม่ตรงกับความจริง

เพิ่มแรงเสียดทาน

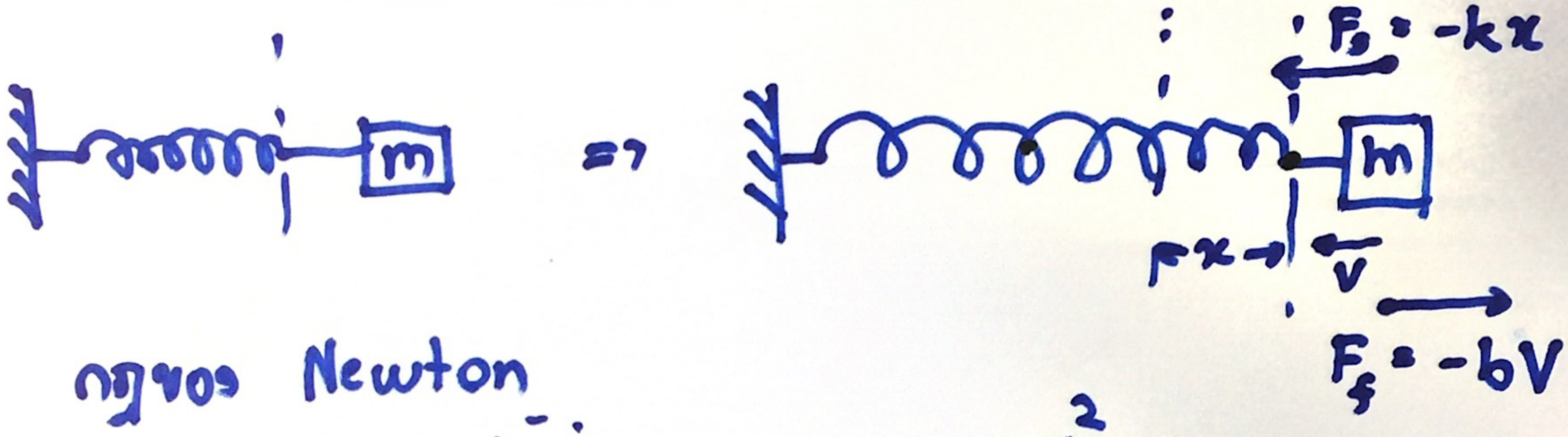
ค่าคงตัว

แรงเสียดทาน $F = \mu_k N$ X

โดยทั่วไป แรงเสียดทานไม่คงที่

แรงเสียดทาน น่าจะขึ้นกับความเร็ว V

$\Rightarrow F_{\text{เสียดทาน}} \propto V \Rightarrow F_{\text{เสียดทาน}} = -bV$



กฎของ Newton

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$F = -kx - bV = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + b\frac{dx}{dt} = 0$$

เนื่องจากแรงเสียดทาน

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0}$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_1 t + \theta)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dA}{dt}\cos(\omega_1 t + \theta) + A\left(-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta)\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2A}{dt^2}\cos(\omega_1 t + \theta) + \frac{dA}{dt}\left(-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta)\right)$$

$$+ \frac{dA}{dt}\left(-\omega_1 \sin(\omega_1 t + \theta)\right) + A\left(-\omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \theta)\right)$$

พิจารณาพจน์ที่มี sin.

$$2\frac{dA}{dt}\left(-\omega_1 \cancel{\sin(\omega_1 t + \theta)}\right) + \frac{b}{m} \cdot A\left(-\omega_1 \cancel{\sin(\omega_1 t + \theta)}\right) = 0$$

$$2\frac{dA}{dt} + \frac{b}{m}A = 0$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{b}{2m}A$$

$$\int \frac{dA}{A} = \int -\frac{b}{2m}\,dt$$

$$\ln A = -\frac{b}{2m}t + C$$

$$e^{\ln A} = e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot e^{C} \Leftarrow A$$

$$\boxed{A(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}}$$

พิจารณาพจน์ที่มี cos.

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2} - \omega_1^2 A + \frac{k}{m} A + \frac{b}{m}\cdot\frac{dA}{dt}\right)\cos(\omega_1 t + \theta) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{-b}{2m}\right)^2 \cancel{Ae^{-\frac{b}{2m}t}} - \omega_1^2 \cancel{Ae^{-\frac{b}{2m}t}} + \omega_0^2 \cancel{Ae^{-\frac{b}{2m}t}} + \frac{b}{m}\cdot\left(\frac{-b}{2m}\right)\cancel{Ae^{-\frac{b}{2m}t}} = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{b}{2m}\right)^2}_{\frac{b^2}{4m^2}} - \omega_1^2 + \omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$$

ให้ $\boxed{\gamma = \frac{b}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

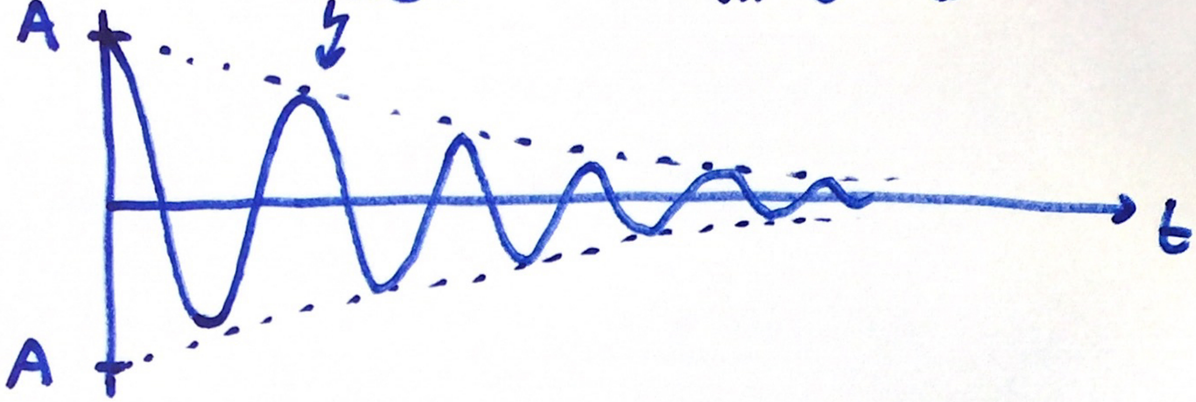
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_1 t + \theta) \quad ;$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}} \cos(\omega_1 t + \theta)}$$

โดยที่ $$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Damped oscillation

ให้ $\theta = 0$



พลังงานรวม.

$$E_{รวม} = \frac{1}{2}kA^2$$ ในกรณีที่ไม่มีแรงเสียดทาน

ในกรณีที่ แรงเสียดทานไม่มาก

$$\gamma = \frac{b}{m}$$

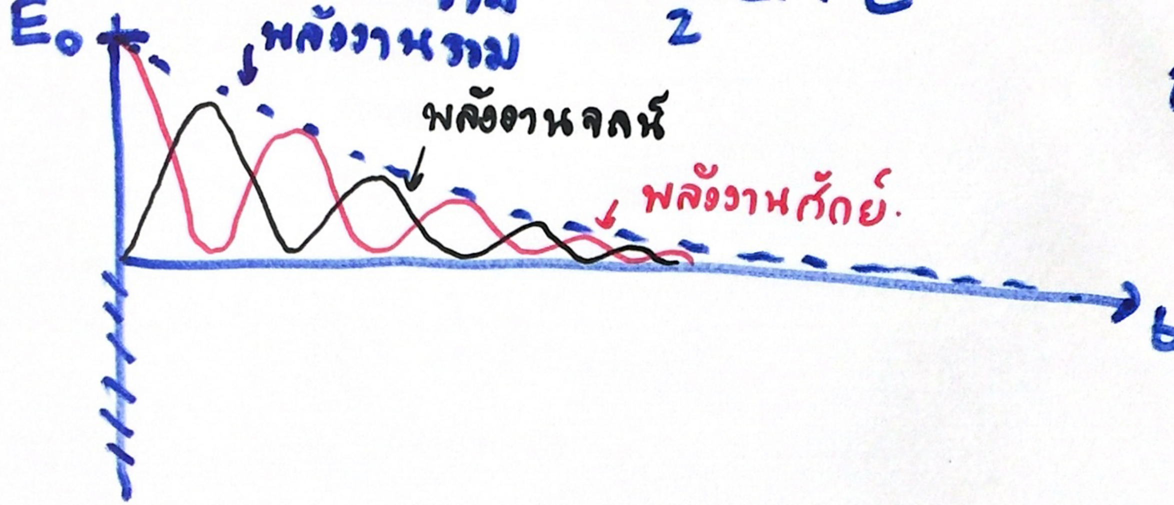
จาก $$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

$\Rightarrow$ $\omega_1 \sim \omega_0$ หรือ $\omega_0^2 \gg \frac{\gamma^2}{4}$

$\Rightarrow$ $A \to Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}$

$$\Rightarrow E_{\text{รวม}} = \frac{1}{2}kA^2 e^{-\gamma t} = E_0 e^{-\gamma t}$$

โดยที่ $E_0 = \frac{1}{2}kA^2$



Forced Harmonic Oscillation

ไม่มีแรงเสียดทาน $b = 0$

โดยที่ $F_d(t) = F_0 \cos \omega t$; ω จะมีค่าเท่าไหร่ก็ได้

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Downarrow$$

$$F_s + F_d = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t.}$$ สมการการเคลื่อนที่

คำตอบ $\qquad x(t) = B\cos\omega t$

หา $\qquad B = ?$

$$-\omega^2 B\,\cancel{\cos\omega t} + \frac{k}{m}\overset{B}{\cancel{B}}\,\cancel{\cos\omega t} = \frac{F_0}{m}\,\cancel{\cos\omega t}$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\,B = \frac{F_0}{m}$$

$$B = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t.}$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)}}_{= B} \cos \omega t + A\cos(\omega_0 t + \theta)} \; ; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ความถี่ธรรมชาติ

คำตอบทั่วไป

เป็นคำตอบของ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

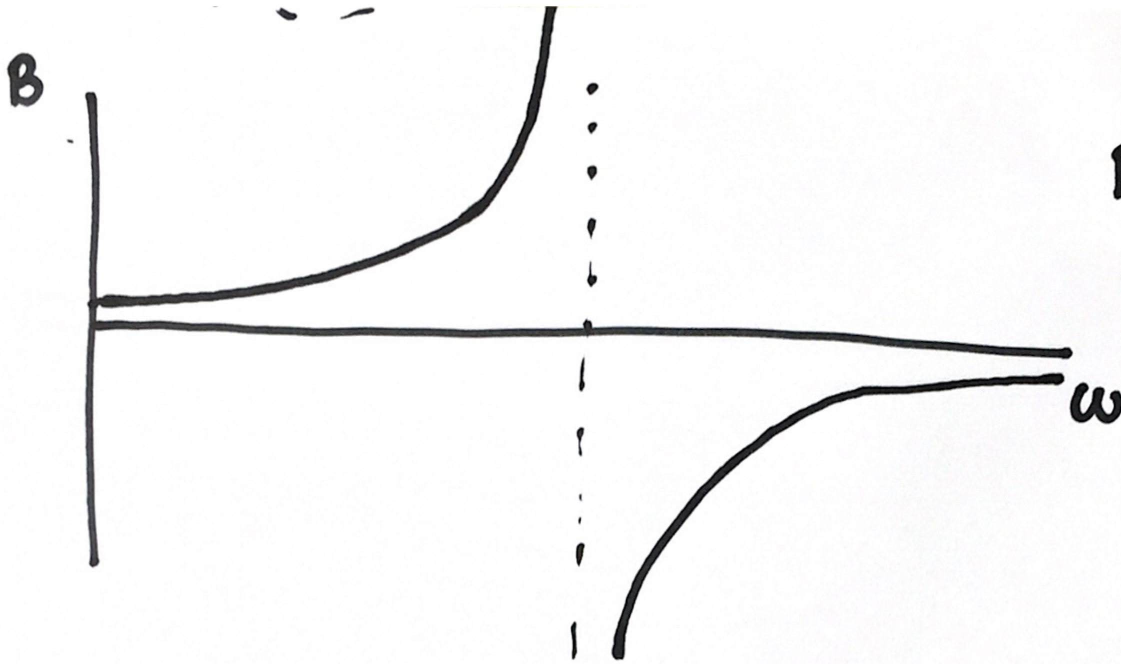
ถ้ามีแรงเสียดทาน $A \rightarrow Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \rightarrow 0$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

=> พจน์ที่ 2 จะหายไป ถ้ามีแรงเสียดทาน

ถ้าไม่มีแรงเสียดทาน ระบบจะสั่นด้วย 2 ความถี่ คือ

ω กับ ω_0

ใส่เข้าไป ความถี่ธรรมชาติ



$B \to \infty$

ถ้า $\omega \to \omega_0$

resonance.

$\cancel{\omega^+ \to \omega_0}$ $\cancel{B > 0}$

$\cancel{\omega^- \to \omega_0}$

$\omega \lesssim \omega_0$ ω น้อยกว่า ω_0 แต่เข้าใกล้ $\omega_0 \Rightarrow B>0$

$\omega \gtrsim \omega_0$ " มากกว่า " —— " $\Rightarrow B<0$

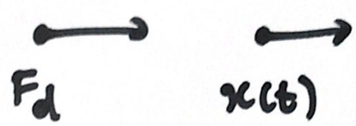
$$F_d = F_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos\omega t = B\cos\omega t$$

ในกรณีที่ $B > 0 \Rightarrow$ การสั่นมี phase เดียวกันกับแรง

$B < 0 \Rightarrow$ การสั่นมี phase ตรงกันข้ามกับแรง

$B > 0$



$B < 0$