Lecture 10

Superconductivity

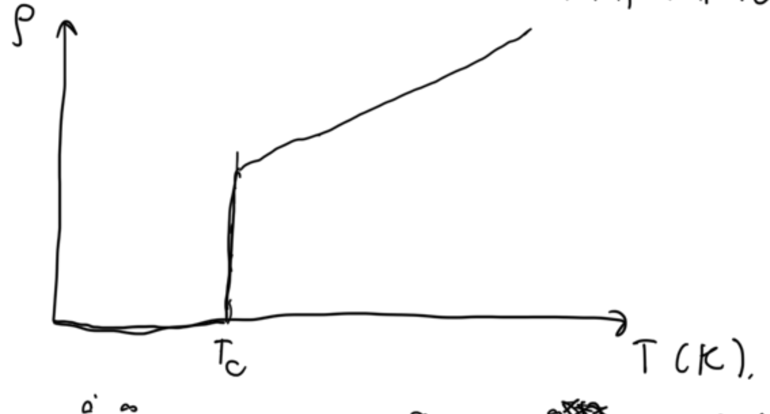
Superconductivity เกิดจาก electron-electron interact

Superconductors

- *conventional superconductors. ✓
- high-T_c (high-transition-temperature) superconductors ×

Physical properties ของ (conventional) superconductors.

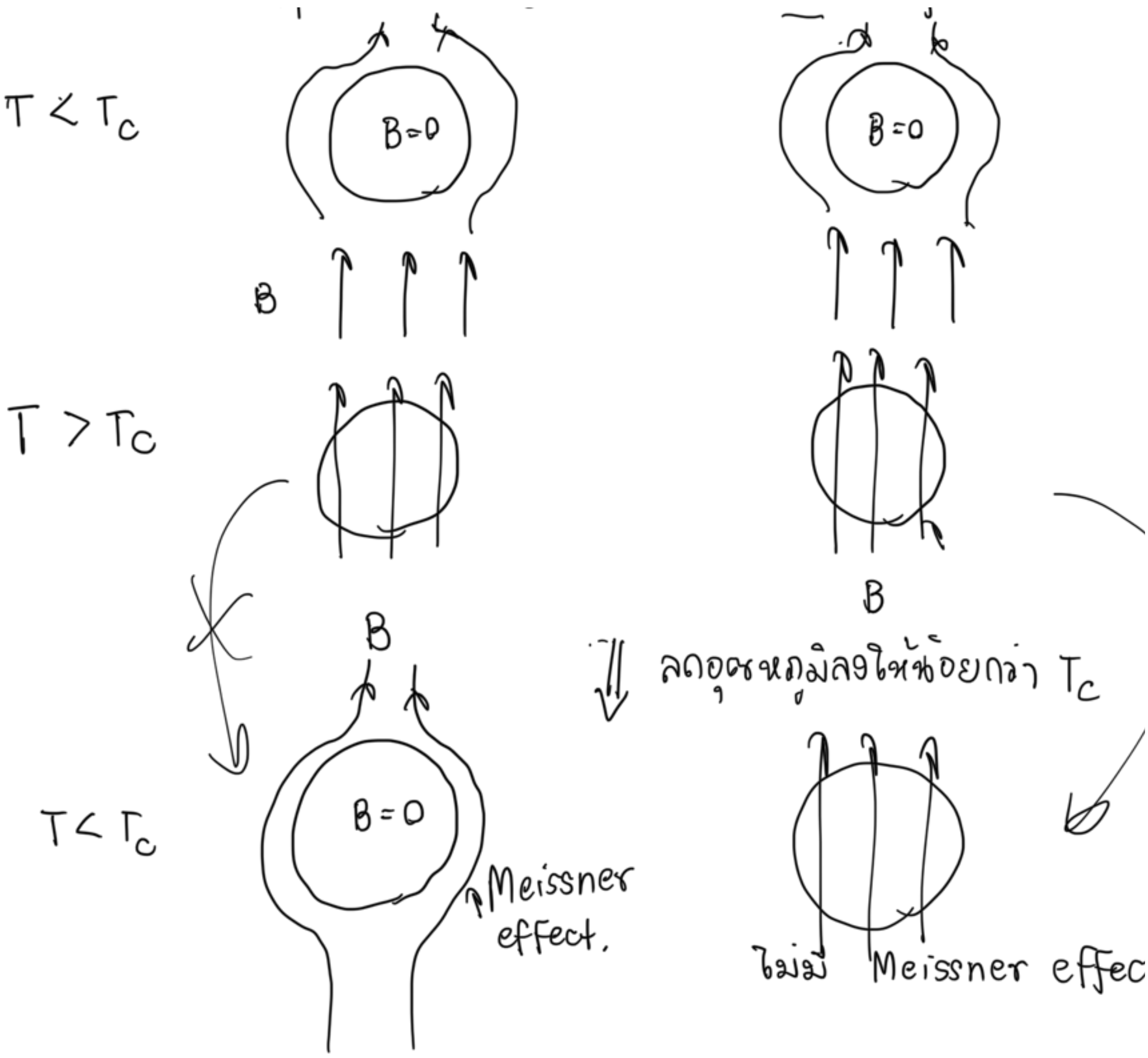
1. Conventional superconductor จะเจอใน non-magnetic metal โลหะเหล่านี้จะมีสมบัติ ความต้านท เป็นศูนย์ที่อุณหภูมิต่ำ ถ้า $T < T_c$ (critical หรือ transit temperature.



T_c อาจจะต่ำถึง 0.01K หรือ สูงถึง*** อุณหภูมิห้อง*** แต่มีความดันที่สูงมาก

2. Meissner effect : การผลัก magnetic flux ออก จากตัว superconductors

superconductors (perfect conductors โลหะที่มี $\rho = 0$



3. ถ้ามี magnetic impurity เช่น Fe เราจะพบว่า สมบัติ superconductivity จะน้อยลง. (conventional sc.)

4. ถ้าเรา apply magnetic field จะพบว่า ความเป็น superconductivity จะน้อยลง หรือหายไปเลย. ถ้า $H > H_c$.

Meissner effect : สมบัติที่สนามแม่เหล็กภายใน (สนาม (total magnetic field) superconductor มีค่าเป็นศูนย์

$$\Rightarrow \quad B_{total} = 0 \quad \text{(ภายใน)}.$$

(apply magnetic field)

$\Rightarrow$ ถ้า $T < T_c$ และ $H < H_c$

magnetic field lines จะโดนผลักออกไปจาก

(flux)
superconductor ทั้งหมด,

พิจารณา magnetic field ภายในลวด

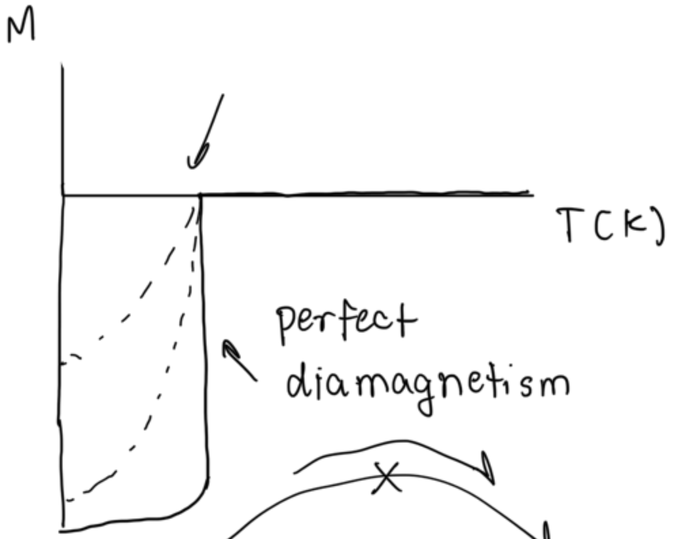
$$B = B_a + \mu_0 M = 0.$$

B_a: applied magnetic field

M: induced magnetization

$$\Rightarrow M = -\frac{B_a}{\mu_0}$$

M: วัดได้



Meissner effect ไม่เกี่ยวกับ zero resistivity

แยกย่อย superconductivity ออกได้เป็น 2 types ขึ้นกับการตอบสนองต่อ applied magnetic field.

1. Type-I superconductors :

Meissner effect จะเป็นแบบ complete เสมอใน superconducting state ($T < T_c$ และ $H < H_c$)

$H < H_c$: complete Meissner effect.

$H > H_c$: magnetic flux จะเข้าไปในตัวสารทั้งหมด

ค่า H_c จะมีค่าน้อย 100 - 1,000 Oe . Pb, Hg ..

2. Type - II - superconductors.

จะมี 2 critical fields คือ H_{c1} และ H_{c2}.

$H < H_{c1}$: complete Meissner effect.

$H_{c1} < H < H_{c2}$: สารจะยอมให้ magnetic field line penetrate เข้าไปได้บางส่วน แลกกับสมบัติ superconductivity.

$H > H_{c2}$: complete penetration ของ magetic field line.

โดยทั่วไป Type - II จะมี H_{c2} ที่สูง. อาจจะสูงถึง 41 T จะเกิดในสารพวก alloys Nb, Al Ge

$PbMo_6S_8$ ← H_{c2} = 54 T. (54×10^4 Oe)

540,000 Oe.

ประโยชน์ของ Type - II คือสามารถนำมาสร้างขดลวด เพื่อ generate magnetic field ที่มีความเข้มสูงได้

Heat capacity

ถ้าเป็น normal conductors heat capacity จะมี contribution มาจาก 2 อย่าง

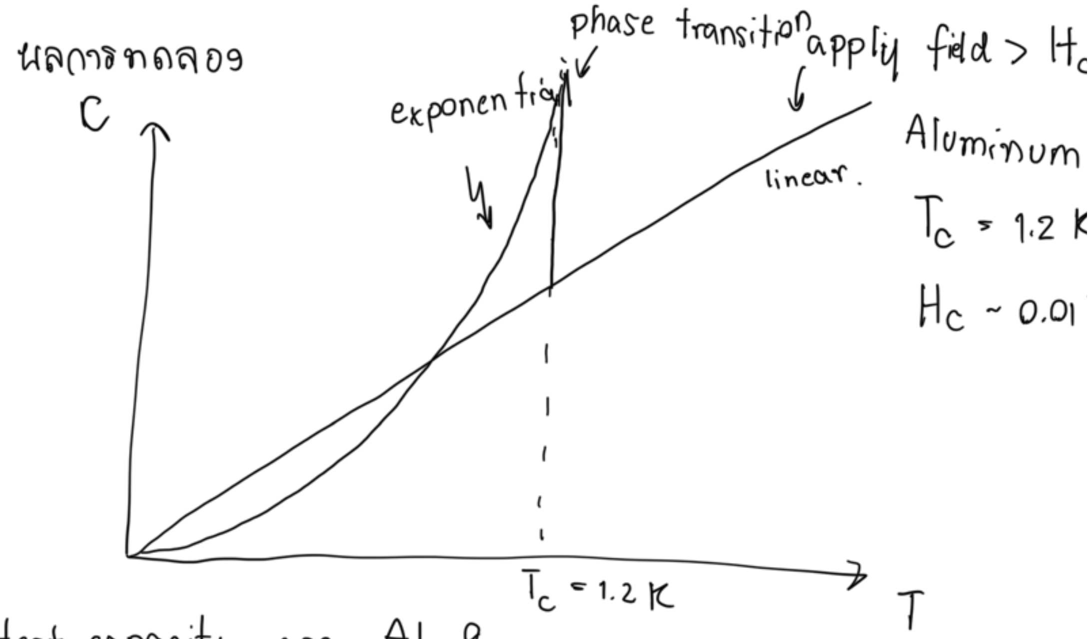
- phonons : $C_{phono} \propto T^3$

phonons

- electrons : $C_{el} \propto T$

$$C_{nc} = AT + BT^3$$

heat capacity ของ normal conductors



Heat capacity ของ Al ใน superconducting state.

$$C_{el} = C_{total} - C_{phonons}$$

$$\frac{C_{el}}{T} = C_o e^{-\Delta_s T_c / T}$$ ← มาจากการทดลอง

ผลจาก heat capacity => ใน superconducting state e^- มี energy gap => เกิดจาก electron-electron interaction

ซึ่งต่างจาก energy gap ใน electronic band struc
ที่เกิดจาก e^- - nucleus interaction.

Δ : superconducting gap

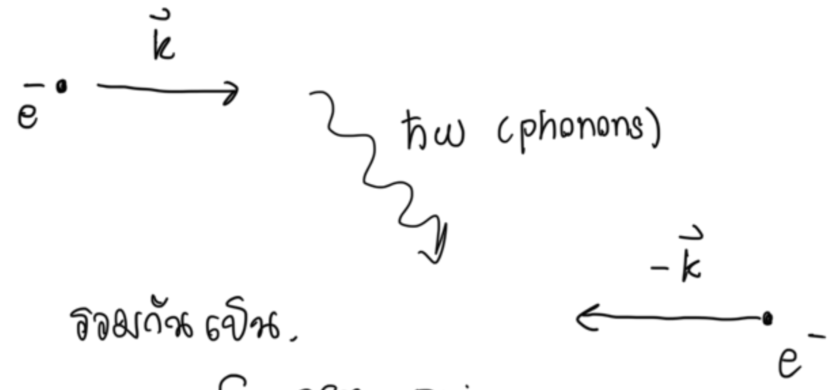
Δ_s : superconducting gap.

ใน microscopic theory จะพบว่า

$$\Delta_s \sim e^{-E_g/2k_BT}$$

=> เกิดมาจาก e^- 2 ตัว.

=> superconducting state เกิดขึ้นจากการรวมตัวของ e^- 2 ตัว. ที่มี attractive interaction ต่อกัน. ผ่าน phonons.



Cooper pair

พิจารณา entropy จาก heat capacity.

$$S = \int_0^T \frac{C}{T'} dT'$$

จากการทดลอง

=> S ใน superconducting state มีค่าน้อยกว่า ใน normal state

=> superconducting state มีความเป็นระเบียบมากกว่า

=> ความต่างระหว่าง entropy ของ SC กับ NS $10^{-4}\ k_B/\text{atom}$.

มีค่าน้อยมากๆ ⇒ $\bar{e}$ ที่ form Cooper pair มีจำนวนที่น้อยมากๆ.

Isotope effect.

ค่า T_c จะเปลี่ยนไป ถ้า isotope ของธาตุเปลี่ยน

Hg : $T_c = 4.185$ K ที่ atomic mass 199.5

$T_c = 4.146$ K ที่ " 203.4

⇒ Mass เพิ่มขึ้น ทำให้ T_c ลดลง. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

⇓

พลังงานของ phonons ลดลง

จากการทดลอง

$$M^{\alpha} T_c = C \quad \text{(constant.)}$$

$$T_c \propto \frac{1}{M^{\alpha}}$$ ← ขึ้นกับธาตุหรือสาร

Phenomenological Theory.

ความต่างของ superconductor vs perfect conductor

Perfect conductor $(\rho = 0)$ ✗

$$\boxed{\vec{E} = \rho\vec{j}} = 0 \quad ✗$$

จาก Maxwell's equations.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

ใน superconducting state เราไม่สามารถหา $\vec{j}$
ได้จากสมการ $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ✗

(↑ σ: conductivity)

$\Rightarrow$ $\vec{j}$ ต้องมีความสัมพันธ์กับ $\vec{B}$ $\qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times$

London equation : $\vec{j}$ สัมพันธ์กับ $\vec{A}$

$$\vec{j} \propto \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = k\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2}\vec{A}}$$

λ_L: London's penetrat dept.

$$\vec{\nabla}\times\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\vec{B}$$

จาก Maxwell's equation

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{\nabla}\times\vec{j}$$

$$-\nabla^2\vec{B} = \mu_0\left(-\frac{1}{\mu_0\lambda_L^2}\vec{B}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\lambda_L^2}$$

สมมติว่า $\vec{B}$ uniform ใน space (by contradict

↳ $B(x)$ เป็นค่าคงที่ ⇒ $B(x) = 0$ ในspace ทั้งหมด ⇒ $j = 0$ ⇒⇐

⇒ $\vec{B}$ ไม่ uniform

ใน 1 มิติ

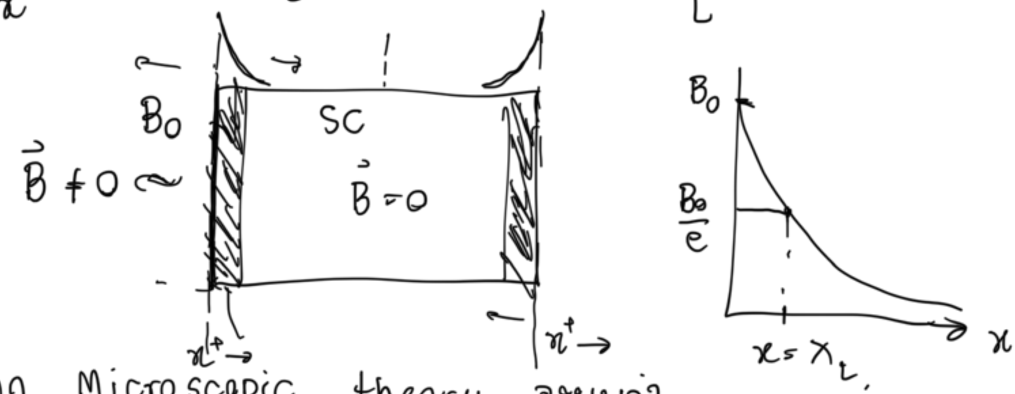
$$\frac{d^2B}{dx^2} = \frac{\vec{B}}{\lambda_L^2}$$ ✓

general solution $B(x) = Ae^{-x/\lambda_L} + B\ldots$

คำตอบ.

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L}$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \left(\frac{-1}{\lambda_L}\right)^2 B_0 e^{-x/\lambda_L} = \frac{1}{\lambda_L^2} \cdot B(x).$$ ✓



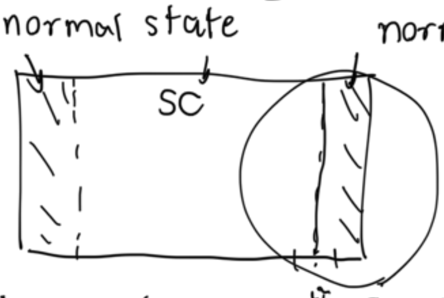
จาก Microscopic theory จะพบว่า

$$\lambda_L = \left(\frac{\varepsilon_0 mc^2}{nq^2}\right)^{1/2}$$

m, q เป็นมวลและประจุของอนุภาค. และ n เป็นความหนาแน่น.

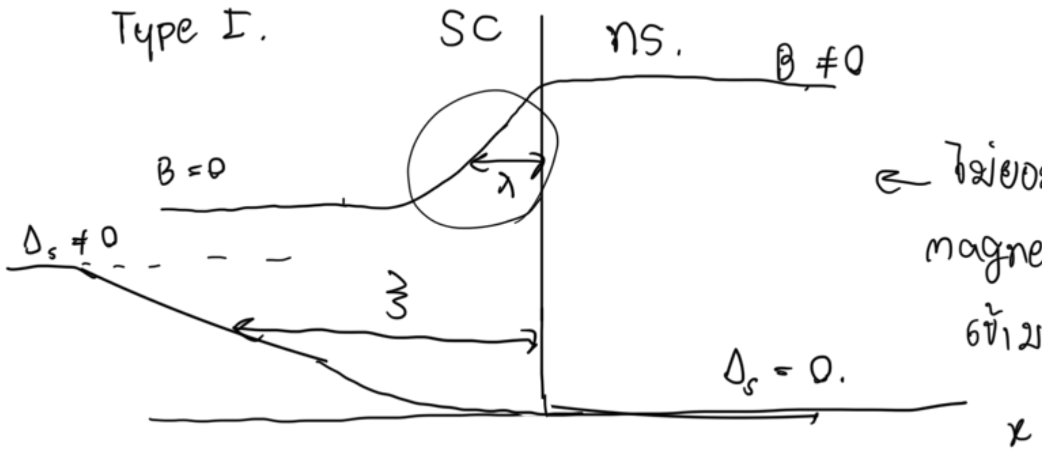
λ_L กำหนด length scale ที่ magnetic flux สามารถ penetrate ตัว superconductor ได้.

Coherence length ξ

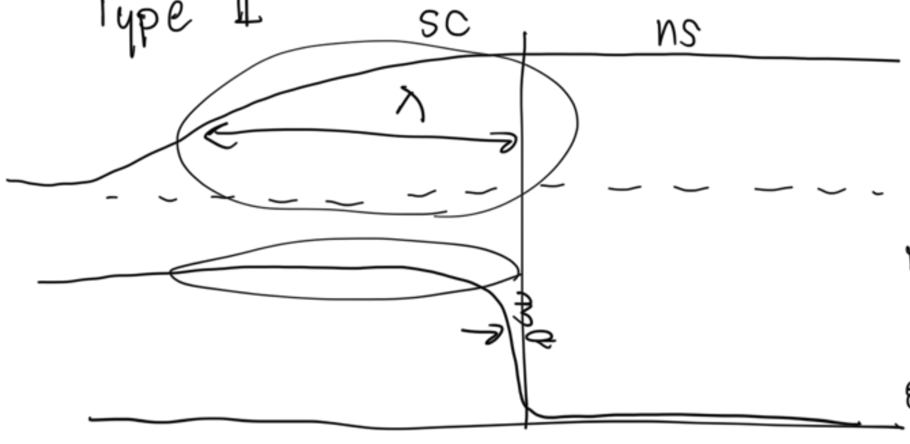


บอก length scale ของชั้นที่อยู่ระหว่าง SC กับ normal state

- Type-I superconductor $\xi > \lambda$
- Type-II superconductor $\xi \ll \lambda$.



← ไม่ยอมให้ magnetic flu
เข้ามา



ยอมให้มี magnetic flu
เข้ามาได้ และ
ยังคงเป็น SC.

ประมาณค่า ξ ใช้ Heisenberg uncertainty principle

principle.

$$\Delta = \delta E = \delta\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p_F}{m}\delta p$$

$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$

$$= v_F \delta p. \Rightarrow \delta p = \Delta / v_F$$

$$\xi_0 \sim \frac{h}{\delta p} \sim \frac{h v_F}{\Delta} \sim \frac{E_F}{k_F} \cdot \frac{1}{\Delta} \qquad \frac{\omega}{k} = v$$

$$h v_F = \frac{E_F}{k_F} \qquad E = \hbar v k.$$

$$E_F \sim 10^3 - 10^4 \Delta \qquad k_F \sim 10^8\ m^{-1}$$

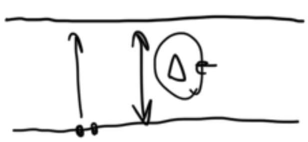
$$\Rightarrow \xi_0 \sim 10^3\ \text{Å}$$

Microscopic Theory

BCS Theory ในปี 1957

B = Bardeen, C = Cooper, S = Shreiffer.

1. มีแรงดึงดูดระหว่าง e^- (attractive interactio).
   ↳ ทำให้พลังงานของ e^- น้อยลง เปรียบเทียบกับ free e^-



2. attractive interaction ระหว่าง e^- เกิดจาก phonons.
3. หา T_c ได้ T_c จะขึ้นกับ density of states ข e^- ที่ Fermi level และพลังงานของ phonons.

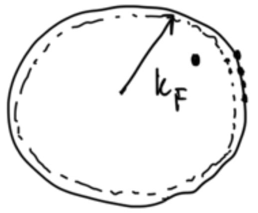
↳ $\bar{e}$-phonon interac

4. H_c, λ_L และ ξ สามารถอธิบายโดย BCS Theory

Spin ของ e^- ต้องมี state ที่ตรงกันข้าม

พิจารณา wave-function ของ state ที่มี e^- 2 ตัว.

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{k} g(k) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}$$



โดย $g(\vec{k}) = 0$ ถ้า $|\vec{k}| < k_F$

$$\mathcal{H} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$\mathcal{H}\psi = (E + E_F)\psi$$

พลังงานจากการที่ $\bar{e}$'s form cooper pair.

$E < 0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\psi + V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\psi = (E + E_F)\psi$$

$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ เป็น $\bar{e} - \bar{e}$ inteaction ผ่าน phonons.

$\vec{k}$ ของ $\bar{e}$ 2 ตัว จะมี magnitude ที่เท่ากัน แต่มีทิศตรงข้าม.

$$\sum_{k} \left[\frac{\hbar^2}{2m}(k^2 + k^2) g(k)\right] e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} + \sum_{k}\left[\sum_{k'} g(\vec{k}') V_{kk'}\right] e$$

ให้ $V_{kk'} = \frac{1}{\;} \int V(\vec{r}) e^{-i\vec{r}(\vec{k} - \vec{k}')}$ ... $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$ {}_{kk} \quad \frac{1}{L^3}\int \ldots $$

$$ = (E + 2E_F) \sum_k g(\vec{k}) \, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} $$

$$ \Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{m} g(k) + \sum_{k'} g(\vec{k}') V_{kk'} = (E + 2E_F) g(\vec{k}) $$

ประมาณค่า $V_{kk'}$ ให้มีค่าคงที่

strength ของ interaction

$$ V_{kk'} = \begin{cases} -\dfrac{V}{L^3} & \text{ถ้า } \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{ถ้า } \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} > E_F + \hbar\omega_D \end{cases} $$

$$ \frac{\hbar^2 k^2}{m} g(k) + \sum_{k'} g(k') \cdot \left(-\frac{V}{L^3}\right) = (E + 2E_F) g(k) $$

$$ \Rightarrow \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E - 2E_F\right) g(k) = +\frac{V}{L^3} \sum_{k'} g(k') $$

$$ \sum_k g(k) $$

$$ g(k) = \frac{V}{L^3} \sum_k \frac{g(k)}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E - 2E_F} $$

$$ 1 = \frac{V}{L^3} \sum_k \frac{1}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E - 2E_F} $$

ให้ $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F$ $\quad$ $0 < \varepsilon < \hbar\omega_D$

Debye energy

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{V}{L^3}\sum_k \frac{1}{2\varepsilon - E}$$

$$\frac{1}{L^3}\sum_k \longrightarrow \int D(E)\, dE$$ density of st... ที่ Fermi lev... $D(E_F)$)

$$\Rightarrow \quad 1 = V\int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{2\varepsilon - E} D(0)\, d\varepsilon .$$

$$= D(0)V \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{1}{2\varepsilon - E}\, d\varepsilon$$

$$= D(0)V \cdot \frac{1}{2}\log(2\varepsilon - E)\Big|_0^{\hbar\omega_D}$$

$$= D(0)V \cdot \frac{1}{2}\log\left(\frac{2\hbar\omega_D - E}{-E}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{D(0)V} = \log\left(\frac{E - 2\hbar\omega_D}{E}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E - 2\hbar\omega_D}{E} = e^{\frac{2}{D(0)V}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{2\hbar\omega_D}{E} = e^{\frac{2}{D(0)V}}$$

ประมาณ $D(0)V \ll 1 \Rightarrow e^{\frac{2}{D(0)V}} \gg 1$.

หรือ $E \ll \hbar\omega_D \Rightarrow \frac{\hbar\omega_D}{-} \gg 1$.

$$1 - \frac{2\hbar\omega_D}{E} \sim -\frac{2\hbar\omega_D}{E} = e^{\frac{2}{D(0)V}}$$

$$\rightarrow \boxed{E \equiv -\Delta = -2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{D(0)V}}}$$

$$kT_c = \frac{\Delta(0)}{1.764}$$

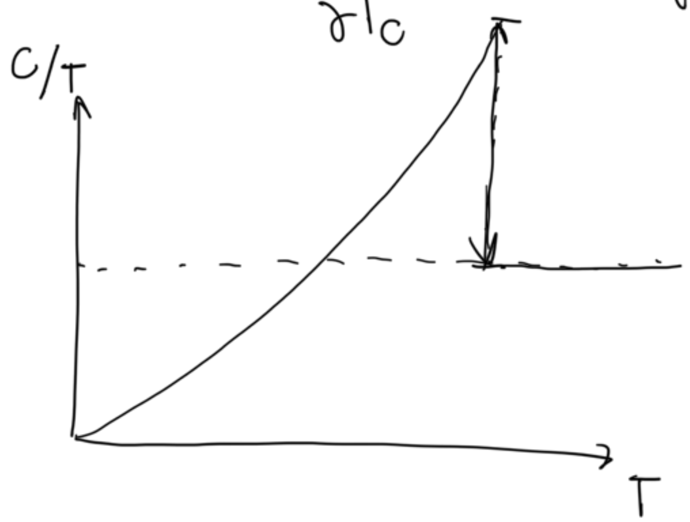
$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1.74\left[1 - \frac{T}{T_c}\right]^{1/2}$$

หา critical field ที่เป็น function ของ T.

$$\frac{H_c(T)}{H_c(0)} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2$$

heat capacity

$$\frac{C_{sc}}{\gamma T_c} = 1.34\left(\frac{\Delta(0)}{T}\right)^{3/2} e^{-\Delta(0)/T}$$



$C \propto T$

$$\frac{C_s - C_n}{C_n} = 1.43$$

สามารถใช้ ratio $\frac{C_s - C_n}{C_n}$ (heat capacity jump ที่ T_c) เพื่อบอกว่า superconductivity ในสารชนิดนั้น สอดคล้องกับ BCS Theory หรือไม่

สำหรับ high-T_c superconductors. ยังไม่สามารถอธิบายได้โดยใช้ BCS Theory.

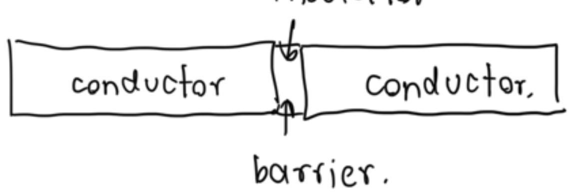
cuprates :

<u>Josephson Tunneling.</u>

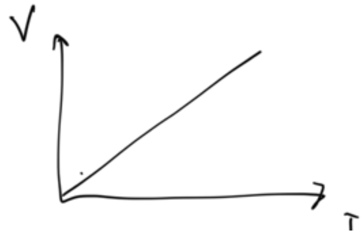
Junction ที่มีชั้น insulator กั้นอยู่ระหว่าง

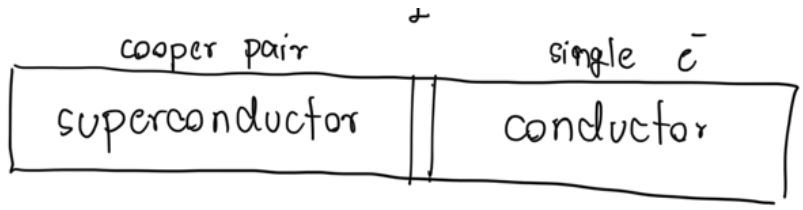
- conductor กับ conductor
- conductor กับ superconductor.
- superconductor กับ superconductor.

①



I-V cure ที่เป็นแบบ ohmic type.

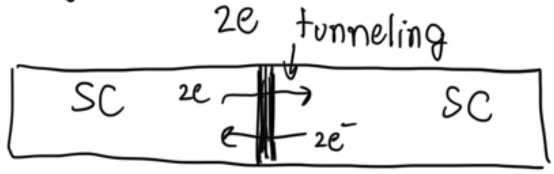


② 

ที่ $T = 0$ ไม่มี current. ถ้าไม่มี voltage.

ที่ $T \neq 0$ มี leaked current

ถ้ามี voltage $\sim \frac{\Delta}{2e}$

③ 

Josephson effects:

1. DC Josephson effect.

   มี direct current โดยที่ไม่มีสนามไฟฟ้าหรือ สนามแม่เหล็ก.

2. AC Josephson effect:

   apply DC voltage เพื่อทำให้เกิด AC current.

   => สามารถวัดค่า $\hbar/e$ ได้แม่นยำ

DC Josephson effect;

ให้ ψ_1 กับ ψ_2 เป็น probability amplitudes ของ cooper pair ในฝั่ง SC 1 (ซ้าย) และ 2 (ขวา).

พิจารณา Schrödinger equation

operator ของการเกิด Tunneling.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1$$

หน่วยของ T จะเป็น ต่อเวลา → rate ของการเกิด tunneling.

$|\psi|^2$ → ความหนาแน่นของ Cooper pair. n.

$$\psi_1 = n_1^{1/2}(t)\, e^{i\theta_1(t)}$$

$$\psi_2 = n_2^{1/2}(t)\, e^{i\theta_2(t)}$$

(1) ... $$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2} n_1^{-1/2} e^{i\theta_1} \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_1^{1/2} e^{i\theta_1} \cdot i \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT\psi_2$$

(2) ... $$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2} n_2^{-1/2} e^{i\theta_2} \frac{\partial n_2}{\partial t} + n_2^{1/2} e^{i\theta_2} \cdot i \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT\psi_1$$

(1) × $n_1^{1/2} e^{-i\theta_1}$

(3) ... $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial n_1}{\partial t} + i n_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT(n_2 n_1)^{1/2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}, \quad \theta_2 - \theta_1 = \delta$$

(2) × $n_2^{1/2} e^{-i\theta_2}$

(4) ... $$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial n_2}{\partial t} + i n_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2} e^{-i(\theta_2 - \theta_1)}, \quad \theta_2 - \theta_1 = \delta$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial n_1}{\partial t} + i n_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2} (\cos\delta + i \sin\delta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\partial n_1}{\partial t} = T(n_1 n_2)^{1/2}\sin\delta$$

$$n_1\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -T(n_1 n_2)^{1/2}\cos\delta$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial n_2}{\partial t} + i n_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -iT(n_1 n_2)^{1/2}(\cos\delta - i\sin\delta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{\partial n_2}{\partial t} = -T(n_1 n_2)^{1/2}\sin\delta$$

$$n_2\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -T(n_1 n_2)^{1/2}\cos\delta$$

$$\Rightarrow \quad * \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} = 2T(n_1 n_2)^{1/2}\sin\delta \quad \cdots (1)$$

$$* \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T(n_1 n_2)^{1/2}\sin\delta \quad \cdots (2)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -T\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2}\cos\delta \quad \cdots (3)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -T\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2}\cos\delta \quad \cdots (4)$$

ถ้าสมมติให้ SC ทั้ง 2 ฝั่งเป็นชนิดเดียวกัน.

$$\Rightarrow \quad n_1 \approx n_2 \quad \Rightarrow \quad (n_2/n_1) \approx (n_1/n_2) \sim 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \approx \frac{\partial \theta_2}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

$\Rightarrow \quad \theta_2 - \theta_1$ คงที่ $\Rightarrow \delta$ คงที่

จากสมการที่ 1 และ 2,

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = -\frac{\partial n_1}{\partial t} \equiv J$$

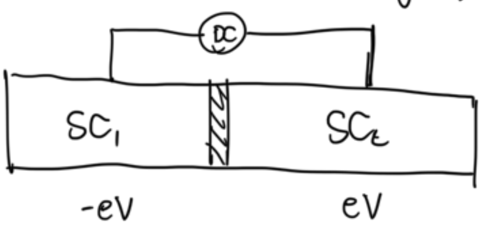
(J = current ของ Cooper pair ที่เกิดจาก tunneling)

$$\Rightarrow \quad J = \underbrace{2T(n_1 n_2)^{1/2}}_{J_0} \sin\delta \equiv J_0 \sin\delta$$

$\Rightarrow$ J อาจจะไม่เท่ากับ 0 ถ้า δ มีค่าไม่ใช่ $0, \pi, 2\pi,$ โดยไม่มี applied voltage.

AC Josephson effect.

มีการ apply DC voltage.



$$P.E = \pm eV \quad \begin{cases} - & \text{สำหรับ } SC_1 \\ + & \text{" } SC_2 \end{cases}$$

จาก Schrödinger equation.

$$\Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hbar T \psi_2 - eV\psi_1$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hbar T \psi_1 + eV\psi_2.$$

หาสมการของ $n_1, n_2, \theta_1, \theta_2$ จากการแทน ψ_1, ψ_2 ในสมการด้านบน

$$\left\{ \frac{\partial n_1}{\partial t} \quad 2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin\delta \right.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n_1}{\partial t} = \underbrace{2T(n_1 n_2)}_{J_0}^{1/2} \sin\delta & \cdots (1) \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} = -2T(n_1 n_2)^{1/2} \sin\delta. & \cdots (2) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{eV}{\hbar} - T\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} \cos\delta \quad \cdots (3)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{eV}{\hbar} - T\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2} \cos\delta, \quad \cdots (4)$$

จาก (4) − (3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\underbrace{\theta_2 - \theta_1}_{=\delta}) = -\frac{2eV}{\hbar} - T\cos\delta\left[\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/2} - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{1/2}\right] \sim 0$$

$n_1 \sim n_2$

$$\Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{2eV}{\hbar}$$

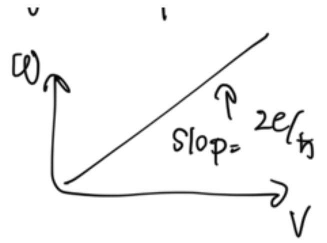
$$\Rightarrow \boxed{\delta(t) = \delta(0) - \frac{2eV}{\hbar}t.}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\frac{\partial n_2}{\partial t} = J = J_0 \sin\delta(t)$$

$$\Rightarrow J(t) = J_0 \sin\left[\delta(0) - \frac{2eV}{\hbar}t\right]$$

⇒ กระแส J จะมีการเกิด oscillation เป็นฟังก์ชันของความถี่เชิงมุม angular frequency

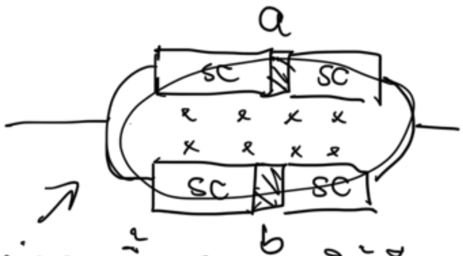
$$\omega = \frac{2eV}{\hbar}$$



SQUID (Superconducting QUantum Interference Device)

Macroscopic Quantum Interference.

เชื่อมต่อ Josephson junction 2 อันเข้าด้วยกัน



device ที่สามารถใช้วัด magnetization ได้

จาก quantization ของ magnetic flex.

$$\hbar c \oint \nabla\theta \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

รอบ loop.

$$\hbar c \cdot 2\pi n = q \int \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

$$= q \int \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = q\Phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_n = \frac{2\pi \hbar c}{q} n}$$

ถ้า integrate ไม่ครบ loop.

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{q\Phi}{\ldots}$$ โดยที่ $q = 2e$

$\hbar c$

phase difference ของ แต่ละ junction ให้เป็น δ_a (ขวา) และ δ_b (ซ้าย).

$$\Rightarrow \delta_b = \delta_0 + \frac{e}{\hbar c}\Phi$$

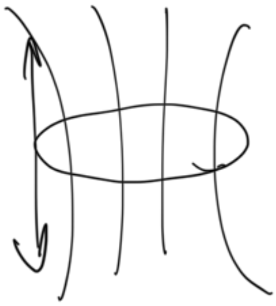
$$\delta_a = \delta_0 - \frac{e}{\hbar c}\Phi$$

total current.

A + B, A − B

$$J_{total} = J_0 \left(\sin\left(\delta_0 + \frac{e}{\hbar c}\Phi\right) + \sin\left(\delta_0 - \frac{e}{\hbar c}\Phi\right) \right)$$

$$= 2 J_0 \sin\delta_0 \cos\frac{e\Phi}{\hbar c}$$



ถ้าเปลี่ยน Φ $\Rightarrow$ J_{total} เปลี่ยน.