Magnetism

Magnetic moments.

1 spin (electron spin). ✓

2 orbital angular moment. ✓

3 nuclear spin ×

↳ contribute น้อยกว่า electron spin ~2000 เท่า

First approximation : no interaction ระหว่าง magnetic moments.

ที่ $\vec{B}$ (magnetic field) เป็นศูนย์

=> เรียงตัวเป็น random

ถ้า $\vec{B} \neq 0$

=> magnetic field จะทำให้ magnetic mome
เรียงตัวไปในทิศทางเดียวกัน

จาก

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \Rightarrow \vec{\mu} \parallel \vec{B}$$

หา magnetization : ค่าของ magnetic moments ต่อหน่วยปริมาตร.

$$\vec{M} \propto \vec{B}$$ (1st appoximatio

ขึ้นกับอุณหภูมิ

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \chi \vec{B}}$$

magnetic susceptibility

$\Rightarrow \chi$ เป็นฟังก์ชันของ T.

จากการที่ χ มีค่า + หรือ − ทำให้เราสามารถ

ประเภทของ magnetic response ได้ 2 แบบ.

1. $\chi < 0 \Rightarrow$ diamagneticm.
2. $\chi > 0 \Rightarrow$ paramagnetism

} no interaction ระ μ

Diamagnetism

↳ เป็นผลมาจาก electric current ของ $\bar{e}$ รอบ. nucleus ที่ถูก induced จาก applied magnetic field

Lamor precession ω_L

$$I = -Ze\left(\frac{\omega_L}{2\pi}\right)$$

เวลาที่ $\bar{e}$ เคลื่อนที่ครบ 1 รอบ.

โดยที่ $\omega_L = \frac{eB}{2mc}$

$$\Rightarrow I = -\frac{Ze \cdot eB}{4\pi mc} = -\frac{Ze^2}{4\pi mc}B$$

สร้างสนามแม่เหล็ก

magnetic moment.

$$\mu = IA$$

enclosed area ของ current loop.

$\tilde{c}.$

$\Rightarrow A = \pi\langle\rho^2\rangle$

$$\Rightarrow \mu = \frac{-Ze^2B}{4\cancel{\pi}mc}\cdot\frac{\cancel{\pi}\langle\rho^2\rangle}{c}$$

$$\mu = \frac{-Ze^2}{4mc^2}\langle\rho^2\rangle\cdot B.$$

ถ้ามี N atom / unit volume.

$$M = N\mu = \overbrace{\frac{-NZe^2}{4mc^2}\langle\rho^2\rangle}^{\chi} B$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{-NZe^2}{4mc^2}\langle\rho^2\rangle$$

สิ่งที่เรารู้ $\langle r\rangle$ ← classical radius ของ e^-.

$$\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle$$

ให้ $\vec{B} \parallel \hat{z}$

$$\langle\rho^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle$$

ถ้าระบบมี spherical symmetry $\Leftarrow$

$$\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\rho^2\rangle = \frac{2}{3}\langle r^2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\chi = -\frac{NZe^2}{\cancel{4}_2 mc^2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\langle r^2\rangle = \frac{-N\,Z\,e^2}{6mc^2}\langle r^2\rangle}$$

<u>Quantum</u> :

โมเมนตัมของ $\bar{e}$ เปลี่ยนไป ถ้ามี applied magnetic field.

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$

ให้ $\vec{B} = B\hat{z}$ $\qquad \vec{B} \parallel \hat{z}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$A_x = -\frac{1}{2}yB, \quad A_y = \frac{1}{2}xB, \quad A_z = 0$$

หรือ $\qquad \boxed{\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{B}}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{2c}\vec{r}\times\vec{B}\right)^2$$

$$= \frac{P^2}{2m} - \frac{1}{2m}\cdot\frac{e}{2c}\left(\vec{P}\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + (\vec{r}\times\vec{B}\right.$$

$$+ \frac{1}{2m}\cdot\frac{e^2}{4c^2}(\vec{r}\times\vec{B})\cdot(\vec{r}\times\vec{B})$$

พิจารณา $\frac{e}{4mc}\left(\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + (\vec{r}\times\vec{B})\cdot\vec{p}\right)$

$A\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (A\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ $\quad\quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

$\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) = (\vec{p}\times\vec{r})\cdot\vec{B} = -\underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{\vec{L}}\cdot\vec{B}$

$\Rightarrow \frac{e}{4mc}\left(\vec{p}\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + (\vec{r}\times\vec{B})\cdot\vec{p}\right) = \frac{e}{2mc}(-\vec{L}\cdot\vec{B})$

พิจารณา

$\frac{e^2}{8mc^2}(\vec{r}\times\vec{B})\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) = \frac{e^2}{8mc^2}\cdot r^2B^2 = \frac{e^2B^2}{8mc^2}(x^2+$

$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - \overset{0}{\cancel{(\vec{A}\cdot\vec{D})}}\,\overset{0}{\cancel{(\vec{B}\cdot\vec{C})}}$

angular momentum $\quad\quad = \mathcal{H}_3$

$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2mc}\vec{L}\cdot\vec{B} + \frac{e^2B^2}{8mc^2}(x^2+y^2)$

$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ $\quad\quad$ diamagnetism

paramagnetism

บอกพลังงานที่เป็น function ของ B.

$$\boxed{M = -\frac{\partial E_B}{\partial B}}$$ (statistical mech)

$E = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

$$e^{-E/k_BT}$$

$$M = N\langle \mu \rangle$$

$$\langle \mu \rangle = \frac{\sum \mu e^{\mu B/k_BT}}{\sum e^{\mu B/k_BT}}$$

$$\varepsilon_B = \langle \phi_0 | \mathcal{H}_3 | \phi_0 \rangle$$

↑ ground state.

$$= \frac{e^2B^2}{8mc^2} \langle \phi_0 | (x^2+y^2) | \phi_0 \rangle.$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3} r^2$$

$$= \frac{e^2B^2}{12mc^2} \underbrace{\langle \phi_0 | r^2 | \phi_0 \rangle}_{\langle r^2 \rangle}.$$

พลังงานของ 1 e^- ใน 1 atom

$$\varepsilon_B = \frac{e^2B^2}{12mc^2} \cdot \langle r^2 \rangle$$

หา พลังงานของ Z e^- ใน N atom.

$$\Rightarrow E_B = ZN\varepsilon_B = \frac{ZNe^2B^2}{12mc^2} \langle r^2 \rangle$$

$$M = -\partial E_B \quad = \quad ZNe^2$$

$$\frac{\partial \quad}{\partial B} = -\frac{ZNe^2}{6mc^2}\langle r^2\rangle B$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\chi = -\frac{ZNe^2}{6mc^2}\langle r^2\rangle}$$

Spin : intrinsic property ของ e^-
(เหมือนประจุ)

electron ที่มี spin มันอยู่ในสารได้ 2 แบบ.

- localized electron $\Rightarrow$ พวก insulator.
  $\Rightarrow$ magnetic moment (spin) ก็ localized
- itenerant electron $\Rightarrow$ พวก metal
  $\Rightarrow$ magnetic moment ที่เคลื่อนที่ได้.

Paramagnetism พิจารณากรณีที่เป็น localized electro ก่อน.

พิจารณาการจัดเรียง e^- ใน atom โดยใช้ Hund Rules

1. Maximize S.
2. Maximize L (แต่ต้องไปดูข้อ 1 ก่อน).
3. total angular momentum

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$\overset{3}{L=1} \quad \times \quad \overset{2}{S=1/2} \quad = 6 \qquad J = \overset{4}{\frac{3}{2}}, \overset{+\;2\;=6}{\frac{1}{2}}$

$L=3 \quad S=1/2 \qquad J = \frac{7}{2}, \frac{5}{2}$

$\overset{9}{L_1=4} \quad \overset{3}{L_2=1} \quad = 27 \qquad J = \overset{11}{5}, \overset{+\;9}{4}, \overset{+\;7}{3} = 2$

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$

$J = L_- + S_-$

$S = \frac{1}{2}$ $\quad L \quad$ $J = L+S$ หรือ $|L-S|$

ถ้า less-than-half filled $\quad J = |L-S|$ ←

more-than-half filled $\quad J = L+S$ ←

พิจารณา d-orbital $\quad \ell = 2$

↑↓ $m_\ell = 2$

↑↓ $m_\ell = 1$

↑↓ $m_\ell = 0$

↑↓ $m_\ell = -1$

↑↓ $m_\ell = -2$

spin-orbit $\propto \vec{L} \cdot \vec{S}$

ของ L

จำนวน e^- n	S	$L = \lvert \Sigma m_\ell \rvert$	J	$^{2S+1}X_J$
1	$1/2$	2	$3/2$	$^2D_{3/2}$
2	1	3	2	$^3F_2$
3	$3/2$	3	$3/2$	$^4F_{3/2}$
4	2	2	0	$^5D_0$
5	$5/2$	0	$5/2$	$^6S_{5/2}$
6	2	2	4	$^5D_4$
7	$3/2$	3	$9/2$	$^4F_{9/2}$
		⋮		
10	0	0	0	$^1S_0$

พวก transition elemental (d-orbital)

=> L จะแทน quenched , average ของ 0.

=> magnetic moment จะมาจาก spin only.

=> magnetic moment เกิดจาก unpaired e^- เท่านั้น.

โดยทั่วไป เราจะพิจารณาค่า J เพื่อหา magnetic moment ของสาร.

พิจารณาพจน์ที่ 2 ของ $\mathcal{H}$ แทนด้วย $\mathcal{H}_J$

$$\boxed{\mathcal{H}_J = g\frac{e\hbar}{2mc}\,\vec{J}\cdot\vec{B}}$$

ใช้ quantum number $m_J = -J, -J+1, -J+2, \ldots J-1, J.$

Landé constant.

$$g = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}\right]$$

ถ้า $L = 0 \quad S = J \quad \Rightarrow \quad g = 2$

ค่า g ของ e^- จะมีค่าเท่ากับ 2.

$$L \Rightarrow \vec{L} + \vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_J = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$$

magnetic moment.

$$\Rightarrow \quad \vec{\mu} = -g\mu_B\vec{J} \quad ; \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}.$$

Bohr magneton.

หรือ $\quad \vec{\mu} = \gamma\hbar\vec{J}$

$$\Rightarrow \quad g\mu_B = \gamma\hbar$$

$\Rightarrow \quad -g\mu_B = \gamma\hbar$

$$\Rightarrow \quad \gamma = -g\frac{\mu_B}{\hbar} = -g\frac{e}{2mc},$$

gyromagnetic ration

เนื่องจาก $\vec{J}$ quantized $\Rightarrow$ พลังงานของที่มาจาก

$\mathcal{H}_J$ quantized ด้วย.

ต้องใช้ statistical mechanics ในการหาพลังงานเฉลี่ยที่ T.

$\Rightarrow$ ต้องหา free energy F. $\equiv \gamma$

$$\boxed{e^{-\beta F} = \sum_{m_j=-J}^{+J} e^{-\beta g\mu_B B m_j}} = \sum_{m_j=-J} \gamma^{m}$$

จาก $\mathcal{H}_J = -g\mu_B \vec{J}\cdot\vec{B}$

ให้ $\vec{B} = B\hat{z}$

$\Rightarrow \quad E = -g\mu_B B m_j$ โดยที่ $m_j = -J, \dots, J$

$$\Rightarrow \quad e^{-\beta F} = \frac{e^{\beta g\mu_B BJ} - e^{-\beta g\mu_B B(J+1)}}{1 - e^{-\beta g\mu_B B}} \times \frac{e^{+\frac{1}{2}\dots}}{e^{+\frac{1}{2}\beta g\dots}}$$

$$= \frac{e^{\beta g\mu_B B(J+\frac{1}{2})} - e^{-\beta g\mu_B B(J+\frac{1}{2})}}{e^{\frac{1}{2}\beta g\mu_B B} - e^{-\frac{1}{2}\beta g\mu_B B}}.$$

$$= \frac{\sinh(\beta g\mu_B B(J+\frac{1}{2}))}{\sinh(\beta g\mu_B B/\dots)}$$

$\sinh(\beta g\mu_B B/2)$.

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{1}{\beta}\Big[\log\big\{\sinh[\beta g\mu_B B(J+\tfrac{1}{2})]\big\} - \log\big\{\sinh[\beta g\mu_B B/2]\big\}\Big]$$

$$M = -N\frac{\partial F}{\partial B}$$

$$= \frac{N}{\cancel{\beta}}\left[\frac{\cosh[\beta g\mu_B B(J+\frac{1}{2})]}{\sinh[\beta g\mu_B B(J+\frac{1}{2})]}\cdot \cancel{\beta} g\mu_B(J+\tfrac{1}{2}) - \frac{\cosh[\beta g\mu_B B/2]}{\sinh[\beta g\mu_B B/2]}\cdot \cancel{\beta} g\mu_B/2\right]$$

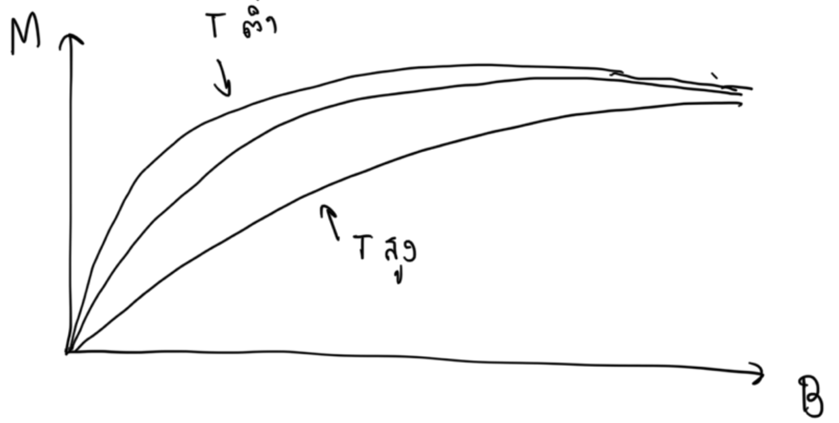
$$= Ng\mu_B\left[\frac{2J+1}{2}\coth[\beta g\mu_B B(J+\tfrac{1}{2})] - \frac{1}{2}\coth(\beta g\mu_B B/2)\right]$$

$$= Ng\mu_B J\left\{\frac{2J+1}{2J}\coth\left[\beta g\mu_B BJ\left(\frac{2J+1}{2J}\right)\right] - \frac{1}{2J}\coth\left[\frac{\beta g\mu_B BJ}{2J}\right]\right\}$$

$$\boxed{M = Ng\mu_B J\cdot B_J(\beta g\mu_B BJ)}$$

$B_J(x)$ คือ Brillouin function โดยที่

$$\rightarrow \quad B_J(x) = \frac{2J+1}{2J}\coth\left(x\cdot\frac{2J+1}{2J}\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{x}{2J}\right)$$



ถ้า $x \to \infty \quad B_J(x) \to 1,$

$B \to \infty \quad M \to Ng\mu_B J$ ← saturated magnetizatio

ถ้า x มีค่าน้อย $x \ll 1.$ ←

หรือ B มีค่าน้อย ๆ.

$$\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \quad \text{ถ้า } x \ll 1.$$

$$B_J(x) \approx \frac{2J+1}{2J}\cdot\left[\left(\frac{2J+1}{2J}x\right)^{-1} + \frac{2J+1}{2J}\cdot\frac{x}{3}\right]$$

$$-\frac{1}{2J}\cdot\left[\left(\frac{x}{2J}\right)^{-1} + \frac{1}{2J}\cdot\frac{x}{3}\right].$$

$$= \cancel{\frac{1}{x}} + \left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2\cdot\frac{x}{3} - \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{(2J)^2}\cdot\frac{x}{3}$$

$$= \frac{(2J+1)^2 - 1}{(2J)^2}\cdot\frac{x}{3}$$

$$= 4J^2 + 4J + \cancel{1} - \cancel{1} \quad x$$

$$= \frac{[illegible]}{4J^2} \cdot \frac{x}{3}$$

$$B_J(x) \approx \frac{J+1}{J} \cdot \frac{x}{3}$$

$B \ll 1$

$$\Rightarrow \quad M = N g \mu_B J \cdot \frac{J+1}{\cancel{J}} \cdot \frac{\beta g \mu_B B J}{3}$$

$$\boxed{M = \underbrace{\frac{N(g\mu_B)^2}{3} \frac{J(J+1)}{k_B T}}_{=\chi} \cdot B}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\chi = \frac{N(g\mu_B)^2}{3} \cdot \frac{J(J+1)}{k_B T}}$$

Curie's law $\Rightarrow \chi \propto \frac{1}{T}$

จาก experiment

$$\boxed{\chi = \frac{C}{T}}$$

โดยที่ $C = \frac{N}{3} \frac{\mu_B^2}{k_B T} p^2$; $p = g(J(J+1$

Itenerant magnetic moments.

↳ e^- (spin) ใน metal (conductor)

หา จำนวนของ e^- ที่มี spin-up n_+

spin-dow n_-

$$M = -\mu_B(n_+ - n_-)$$

ให้ $g_\pm(E)\,dE)$ เป็น density ของ $\bar{e}$ ที่มี spin-up (+) และ spin-down (-) ภายใน range ของพลังงาน ระหว่าง E และ $E + dE$.

ที่ $\vec{B} = 0$

ถ้า density ของ $\bar{e}$ ทั้งหมด $= g(E)$

$$g_\pm(E) = \frac{1}{2}g(E)$$

$$\rightarrow \quad M = 0$$

ถ้า $\vec{B} \neq 0$

จาก $E_B = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

spin-up

$$E \rightarrow E_B = E \mp \mu_B B$$

spin-down

$$g_\pm(E) = \frac{1}{2}g(E \mp \mu_B B)$$

พลังงานรอบๆ E_F

ประมาณว่า $E_F \gg \mu_B B$

$$g(E \mp \mu_B B) = \frac{1}{2}g(E) \mp \frac{1}{2}\mu_B B \cdot \frac{dg}{dE}$$

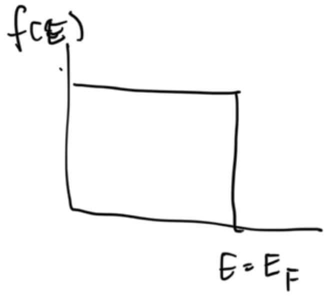
Taylor's expansion.

ให้ $n = n_+ - n_-$

~ 1

โดยที่ $n_\pm = \int g_\pm(E)\, f(E)\, dE$

โดยที่ $n_\pm = \int g_\pm(E) f(E)\, dE.$



$$\Rightarrow n = \int (g_+ - g_-)\, dE$$

$$= -\mu_B B \int \frac{dg}{dE}\, dE$$

$$= -\mu_B B \cdot g(E_F).$$

$$M = -\mu_B (n_+ - n_-) = -\mu_B n$$

$$= \underbrace{\mu_B^2 g(E_F)}\, B$$

$$\Rightarrow \underset{\uparrow \text{Pauli}}{\chi} = \mu_B^2 g(E_F) \leftarrow \text{paramagnetic}$$

temperature-indepen

itinerant electrons มี diamagnetism ด้วย

เนื่องจาก $\bar{e}$ จะมีการเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก ที่สร้างสนาม
ต้านกับ applied magnetic field.

เรียกว่า Landau diamagnetism.

$$\chi_{\text{Landau}} = -\frac{1}{3}\chi_{\text{Pauli}}$$

Interacting spins (magnetic moments).

- dipole-dipole interaction +

range : infinite

strength : small

strength, small,

$$\rightarrow U = \frac{1}{r^3}\left(\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 - 3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})(\vec{m}_2 \cdot \hat{r})\right)$$

$\vec{m}_1 \parallel \vec{m}_2$

$$U \approx \frac{(g\mu_B)^2}{r^3} \leq 10^{-4}\ eV \sim 0.1\ meV$$

short-range interact

- exchange interaction / direct interact
  - Coulomb interaction ← potential
  - Pauli exclusion principle
  - Kinetic energy / delocalization ของ
    - ↳ เป็น curvature ของ wave function

- Ferromagnetic coupling:

total wave function ของ $\bar{e}$ ต้อง antisymmetric

↳ spatial part ← antisymmetrical

↳ spin part. ← symmetric

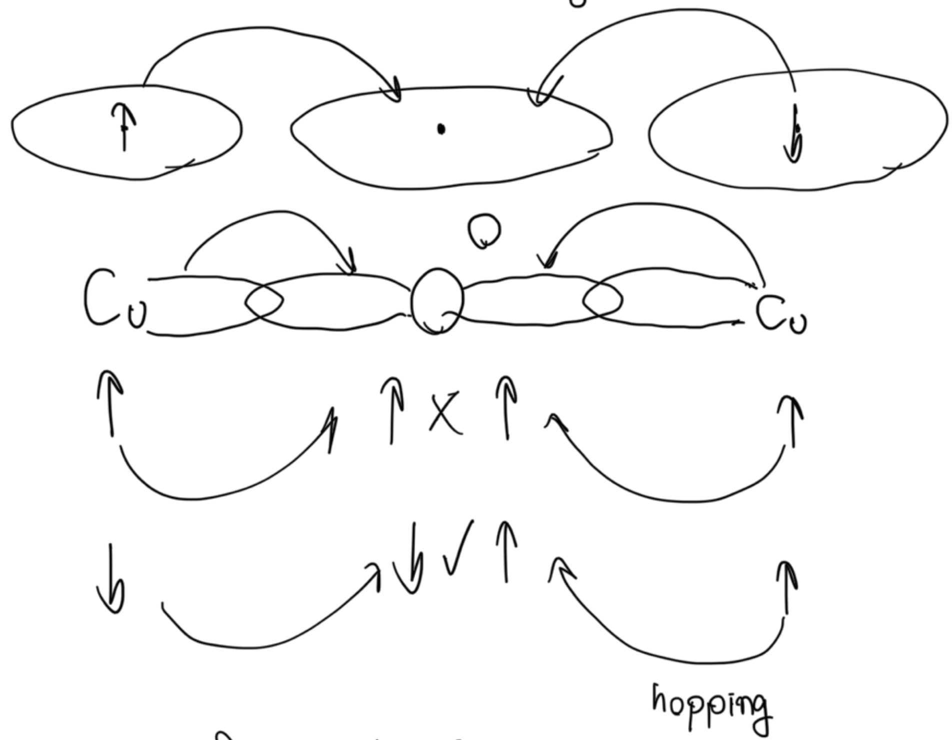
↳ ต้องการให้ spin ชี้ไป ทิศเดียวกัน

พยาม minimize Coulomb repulsion.

- Antiferromagnetic coupling

↳ exchange coupling

exchange coupling



เกิด delocalization ของ e^-

$\Rightarrow$ minimized kinetic energy.

↑↑↑↑↑↑↑ ← eigenstate ของ $\mathcal{H}$

↑↓↑↓↑↓↑ ← ไม่ใช่ eigenstate ของ $\mathcal{H}$.

← frustrated.

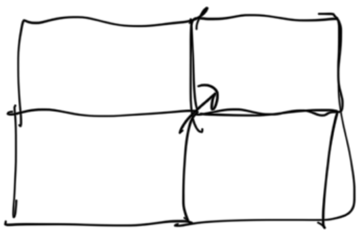
singlet - triplet.

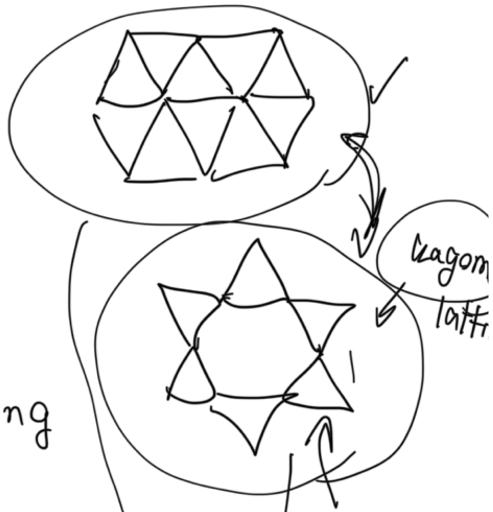
↑ ↑ $\Rightarrow$ $|\uparrow\uparrow\rangle$ $|\downarrow\downarrow\rangle$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$ triplet

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ ← singlet.

$|\downarrow\uparrow\rangle$

ไม่ใช่ eigensta





coupling

$$\mathcal{H}_{Ising} = \sum_{\langle i,j \rangle} J S_{iz} S_{jz}$$

$$\mathcal{H}_{Heisenberg} = \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{J}\, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$