บรรยาย 5 วัตถุแข็ง และการเคลื่อนที่

ทพชท122 วิชาฟิสิกส์ ภาคต้น ปีการศึกษา 2564

อุดม รอบคอบ
ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ ม.มหิดล

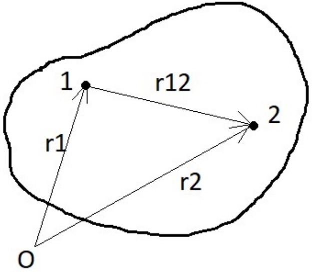
26 พฤศจิกายน พ.ศ. 2564

หัวข้อบรรยาย

- ธรรมชาติของวัตถุแข็ง
- จุดศูนย์กลางมวล และจุดศูนย์ถ่วง
- การหมุนของวัตถุแข็ง และโมเมนต์ความเฉื่อย
- การหมุน และการกลิ้ง
- พลังงานวัตถุ
- สมดุลย์วัตถุ

ธรรมชาติของวัตถุแข็ง

- วัตถุแข็งถูกพิจารณาได้จากระยะที่คงตัวระหว่างสองจุดที่กำหนดภายในวัตถุ
- จลศาสตร์ของวัตถุแข็ง ถูกพิจารณาจากจลศาสตร์ของทุกๆ ตำแหน่งที่กำหนดภายในวัตถุแข็ง



- กำหนดตำแหน่งของจุดภายในวัตถุแข็งเป็น $\{r_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ เมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่ จุดเหล่านี้จะมีความเร็ว $\{v_i\}$

จุดศูนย์กลางมวล และจุดศูนย์ถ่วง

- กำหนดให้วัตถุแข็งมีมวล M สม่ำเสมอ ในปริมาตร V ซึ่งหมายความว่าวัตถุมีความหนาแน่นมวล $\rho = M/V$ คงตัว
- กำหนดให้แต่ละจุดมีปริมาตร ΔV_i และจะมีมวล $\Delta M_i = \rho \Delta V_i$
- จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ ถูกกำนอยามให้อยู่ที่ตำแหน่ง

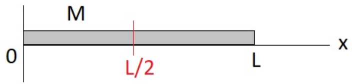
$$R_{cm} = \frac{\sum_i \Delta M_i r_i}{\sum_i \Delta M_i} = \frac{\rho}{M} \sum_i r_i \Delta V_i = \frac{1}{V} \sum_i r_i \Delta V_i = \frac{1}{V} \int_V r dV$$

$$X_{cm} = \frac{1}{V} \int_V x dV, \;\; Y_{cm} = \frac{1}{V} \int_V y dV, \;\; Z_{cm} = \frac{1}{V} \int_V z dV$$

- เราสามารถคำนวณ R_{cm} ได้ สำหรับวัตถุที่มีรูปทรงเรขาคณิต ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล จะอยู่ที่ตำแหน่งสมมาตร

- กรณีตัวอย่าง ท่อนวัตถุมวล M สม่ำเสมอ ยาว L

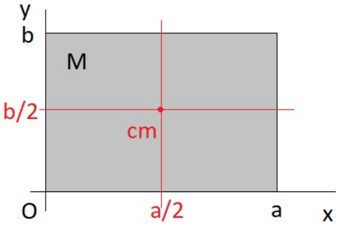
$$X_{cm} = \frac{1}{L}\int_0^L x dx = \frac{1}{L}\left(\frac{L^2}{2}\right) = \frac{L}{2}$$



- กรณีตัวอย่าง แผ่นวัตถุมวล M สม่ำเสมอ กว้าง a ยาว b

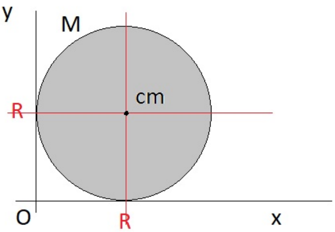
$$X_{xm} = \frac{1}{ab}\int_0^a x dx \int_0^b dy = \frac{1}{ab}\left(\frac{a^2}{2}b\right) = \frac{a}{2}$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{ab}\int_0^a dx \int_0^b y dy = \frac{1}{ab}\left(a\frac{b^2}{2}\right) = \frac{b}{2}$$



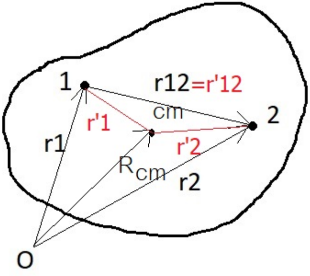
- กรณีตัวอย่าง แผ่นวัตถุวงกลมมวล M สม่ำเสมอ รัศมี R

$$X_{cm} = R, \ Y_{cm} = R$$



- กำหนดจุดอ้างอิงภายในวัตถุแข็ง ที่จุดศูนย์กลางมวล จะเห็นตำแหน่งสัมพัทธ์ และความเร็วสัมพัทธ์ กับจุดศูนย์กลางมวล ของจุดกำหนดต่างๆ ภายในวัตถุแข็งดังนี้

$$r_i = R_{cm} + r'_i, \;\; v_i = V_{cm} + v'_i$$



$$V_{cm} = \frac{\sum_i v_i \Delta M_i}{\sum_i \Delta M_i} = \frac{1}{M}\sum_i p_i \rightarrow P_{cm} = MV_{cm} = \sum_i p_i = p_{tot}$$

- นอกจากนั้น

$$L_{tot} = \sum_i r_i p_i = \sum_i r_i \Delta M_i v_i = \sum_i (R_{cm} + r_i')\Delta M_i (V_{vm} + v_i')$$

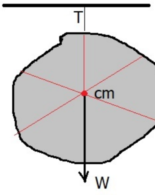
$$L_{tot} = R_{cm} M V_{cm} + \sum_i r_i' \Delta M_i v_i' = I_{cm}\omega_{cm} + I_0 \omega$$

เมื่อ $\sum_i r_i' \Delta M_i = 0 = \sum_i \Delta M_i v_i'$ และ $V_{cm} = R_{cm}\omega_{cm}$
$\rightarrow I_{cm} = MR_{cm}^2$ และ $v_i' = r_i'\omega \rightarrow I_0 = \sum_i r_i'^2 \Delta M_i$

- กำหนดให้มีแรงภายนอกวัตถุ F_{ext} กระทำบนวัตถุ

$$F_{ext} = \frac{\Delta p_{tot}}{\Delta t} = MA_{cm}$$

สิ่งนี้ทำให้เรา เห็นว่าแรงภายนอกกระทำ ที่จุดศูนย์กลางมวล ของวัตถุเท่านั้น (cm = จุดศูนย์ถ่วง (center of gravity))



- กำหนดให้มีแรงบิดภายนอก τ_{ext} กระทำบนวัตถุ

$$\rightarrow \tau_{ext} = I_{cm}\alpha_{cm} + I_0\alpha$$

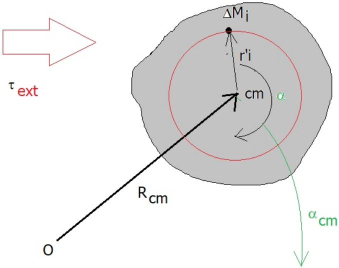
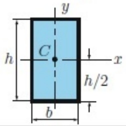


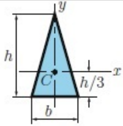
Table: Area inertia properties for some common cross sections



$$A = bh$$

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} \qquad I_C = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$$

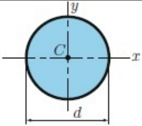
$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{12}$$



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{36} \qquad I_C = \frac{bh}{36}(b^2 + h^2)$$

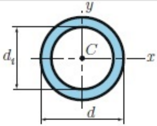
$$I_{yy} = \frac{b^3 h}{36}$$



$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi d^4}{64}$$

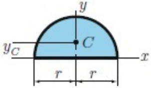
$$I_C = \frac{\pi d^4}{32}$$



$$A = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_i^2)$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_i^4)$$

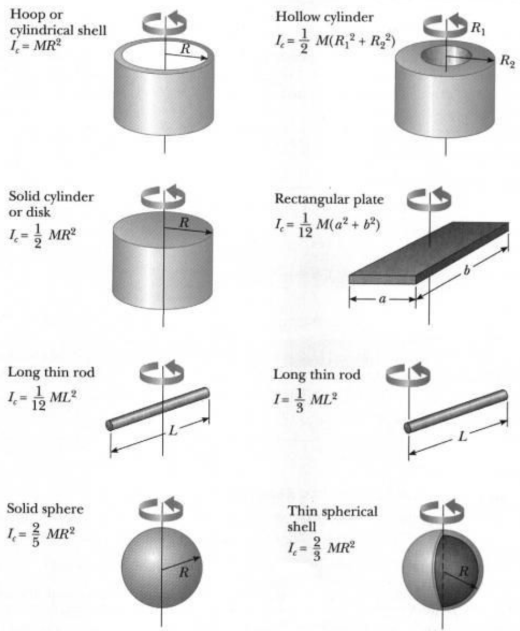
$$I_C = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_i^4)$$



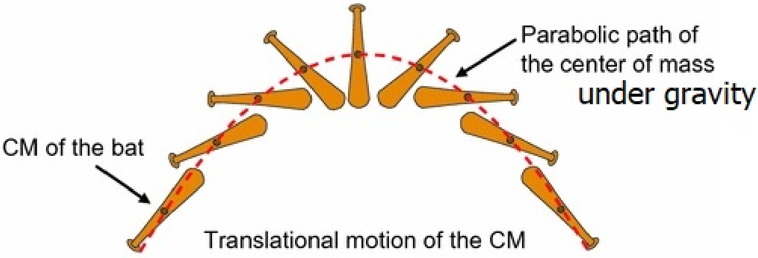
$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$y_C = \frac{4r}{3\pi}$$


Hoop or cylindrical shell
$I_c = MR^2$
R
Hollow cylinder
$I_c = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$
R_1
R_2
Solid cylinder or disk
$I_c = \frac{1}{2} MR^2$
R
Rectangular plate
$I_c = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$
a
b
Long thin rod
$I_c = \frac{1}{12} ML^2$
L
Long thin rod
$I = \frac{1}{3} ML^2$
L
Solid sphere
$I_c = \frac{2}{5} MR^2$
R
Thin spherical shell
$I_c = \frac{2}{3} MR^2$
R

- การเคลื่อนที่ของวัตถุแข็ง = แนวตรงของ cm + หมุนรอบแกนผ่าน cm

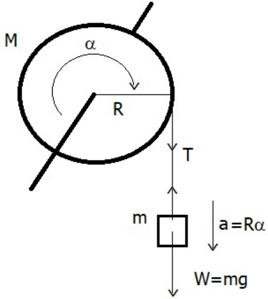


- สมการการเคลื่อนที่

$$F_{ext} = MA_{cm}, \ \tau_{ext} = I_0 \omega$$

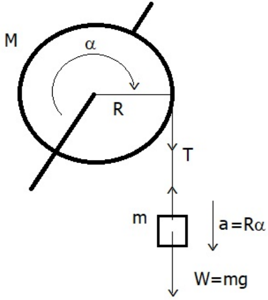
การหมุน (รอบแกนผ่าน cm) ของวัตถุแข็ง

- ล้อตันมวล M สม่ำเสมอ รัศมี $R \rightarrow I_0 = \frac{1}{2}MR^2$
- กรณีตัวอย่าง ล้อหมุนด้วยแรงบิดจากน้ำหนักของลูกตุ้มมวล m



การหมุน (รอบแกนผ่าน cm) ของวัตถุแข็ง

- ล้อตันมวล M สม่ำเสมอ รัศมี $R \rightarrow I_0 = \frac{1}{2}MR^2$
- กรณีตัวอย่าง ล้อหมุนด้วยแรงบิดจากน้ำหนักของลูกตุ้มมวล m



- สมการการหมุน

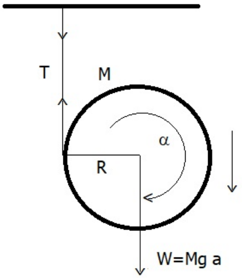
$$mg - T = ma, \tau = RT = I_0\alpha$$

$$T = m(g-a) = \frac{I_0\alpha}{R} = \frac{I_0 a}{R^2}$$

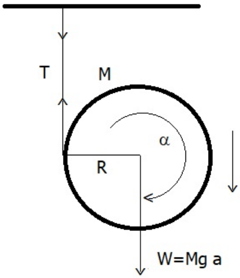
$$mg = \left(m + \frac{I_0}{R^2}\right) = \left(m + \frac{M}{2}\right) a$$

$$\rightarrow a = \frac{g}{1+\frac{M}{2m}}, \quad \alpha = \frac{g/R}{1+\frac{M}{2m}}$$

- กรณีตัวอย่าง ล้อหมุนด้วยแรงบิดจากน้ำหนักของล้อเอง



- กรณีตัวอย่าง ล้อหมุนด้วยแรงบิดจากน้ำหนักของล้อเอง



- สมการการหมุน

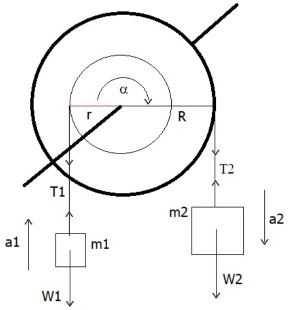
$$Mg - T = Ma, \ \tau = RT = I_0 \alpha$$

$$T = M(g - a) = \frac{I_0 \alpha}{R} = \frac{I_0 a}{R^2}$$

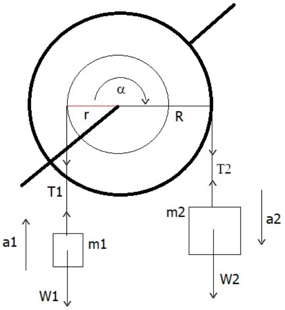
$$g = \left(1 + \frac{I_0}{MR^2}\right) a = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}} a$$

$$\rightarrow a = \frac{2}{3} g, \ \alpha = \frac{2g}{3R}$$

- กรณีตัวอย่าง การหมุนที่ซับซ้อนมากขึ้น



- กรณีตัวอย่าง การหมุนที่ซับซ้อนมากขึ้น



- สมการการหมุน

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1, \; m_2 g - T_1 = m_2 a_2$$

$$\tau = T_2 R - T_1 r = I_0 \alpha$$

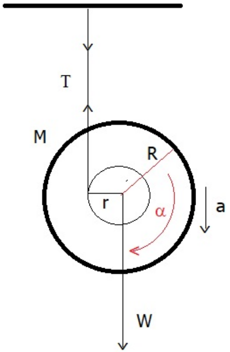
$$T_1 = m_1(g + a_1) = m_1(g + r\alpha)$$

$$T_2 = m_2(g - a_2) = m_2(g - R\alpha)$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{g}{1 + \frac{I_0}{m_2 R - m_1 r}}$$

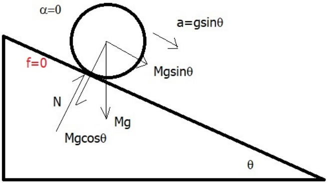
$$a_2 = R\alpha, \; a_1 = r\alpha$$

- งานในห้องเรียน จากรูปลูกดิ่งโยโย่ ให้เขียนสมการการเคลื่อนที่ในแนวตรง และการหมุนของล้อ แล้วแก้สมการหาความเร่งในแนวตรง(ดิ่ง) a และความเร่งเชิงมุม α ในการหมุน (r, R, Mg)



การกลิ้งของล้อ

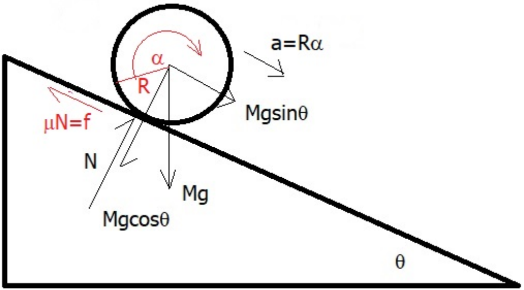
- ล้อตันมวล M รัศมี R บนพื้นเอียงทำมุม θ กับแนวราบ



- กรณีพื้นเอียงลื่น $(f = 0)$

$$a = g\sin\theta$$

- กรณีพื้นเอียงไม่ลื่น



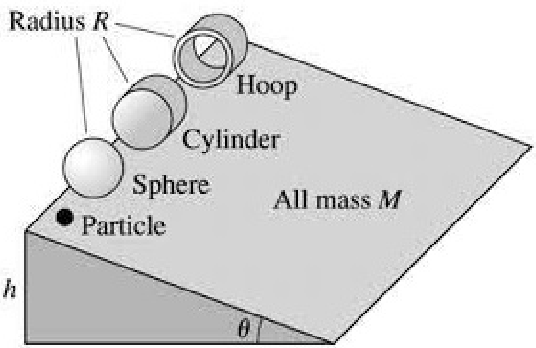
$$Mg\sin\theta - f = Ma, fR = I_0\alpha \to fR = MR(g\sin\theta - a) = \frac{I_0 a}{R}$$

$$MgR\sin\theta = MR^2\left(1 + +\frac{I_0}{MR^2}\right)a$$

$$\to a = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I_0}{MR^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g\sin\theta, \ \ \alpha = \frac{2g\sin\theta}{3R}$$

- งานในห้องเรียน จากการกลิ้งของทรงกลมตันมวล Mสม่ำเสมอ รัศมี R ($I_0 = \frac{2}{5}MR^2$) บนพื้นเอียงที่เอียงทำมุม θ กับแนวราบ ให้คำนวณความเร่งเชิงเส้น a ในแนวพื้นเอียง และความเร่งเชิงมุม α ในการหมุนกลิ้ง (g, θ)

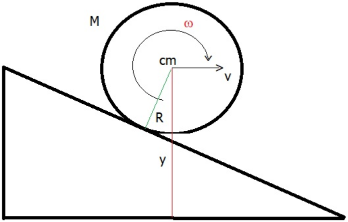
- งานในห้องเรียน จากรูป ให้จัดลำดับการกลิ้งถึงพื้นราบของวัตถุเหล่านี้ (ยกเว้นอนุภาคจะไม่มีการกลิ้ง เพราะไม่มีขนาด)



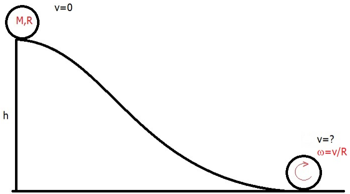
พลังงานของวัตถุ

- วัตถุมีการเคลื่อนที่ ในแนวตรงจากแรงภายนอก และการหมุนจากแรงบิด (โมเมนต์ของแรง) ภายนอก
- พลังงานของวัตถุจะประกอบด้วย ก) พลังงานศักย์จากแรงภายนอก (คิดจากตำแหน่ง cm) ของวัตถุ ข) พลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่ในแนวตรง (คิดจากตำแหน่ง cm) และ ค) พลังงานจลน์จากการหมุน (รอบแกนที่ผ่าน cm)

$$E = U(x_{cm}) + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$$



- การบรรยายการเคลื่อนที่ จากการอนุรักษ์พลังงาน
- ทรงกลมตัน มวล Mสม่ำเสมอ รัศมี R กลิ้งโดยไม่ไถลลงจาก พื้นเอียงไม่สม่ำเสมอ จากหยุดนิ่ง ที่ระดับความสูง h ความเร็วบนพื้นราบ (v, ω) มีค่าเท่าใด?

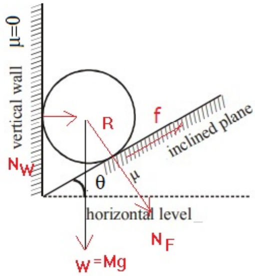


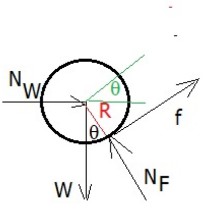
$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_0}{R^2}\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I_0}{MR^2}}} \rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

สมดุลย์วัตถุ

- สมดุลย์ของวัตถุ พิจารณาได้จากสมดุลย์ของแรงแนวตรง และแรงบิด
- กรณีตัวอย่าง สมดุลย์ของทรงกลมตันมวล M รัศมี R ขนาดของแรงเสียดทาน f บนพื้นเอียงมีค่าเท่าใด?





$$Mg\sin\theta = N_W\cos\theta + f,\; W\cos\theta + N_W\sin\theta = N_F$$

$$RN_W\cos\theta = RW\sin\theta \rightarrow N_W = W\tan\theta \rightarrow f = 0$$

- งานในห้อง จากรูป ให้พิจารณาขนาดของแรงเสียดทาน f บนพื้น