

บรรยาย 7 ความยืดหยุ่นของวัตถุ และการแกว่งกวัด

ทพชท122 วิชาฟิสิกส์ ภาคต้น ปีการศึกษา 2564

อุดม รอบคอบ
ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ ม.มหิดล

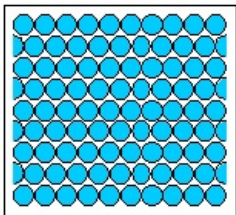
2 ธันวาคม พ.ศ. 2564

หัวข้อบรรยาย

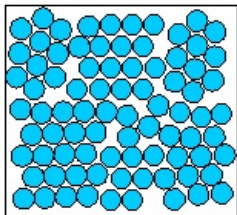
- ▶ ความยืดหยุ่นของวัตถุ
- ▶ กฎของฮุก
- ▶ แรงดึงกลับ และการแกว่งกวัดอย่างง่าย
- ▶ ลูกตุ้มนาฬิกา
- ▶ การกว่งกวัดลดทอน
- ▶ การแกว่งกวัดซับซ้อน

ความยืดหยุ่น

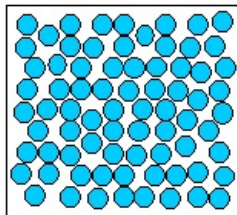
► โครงสร้างของวัตถุแข็ง



Single crystal



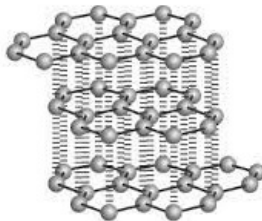
Polycrystal



Amorphous solid

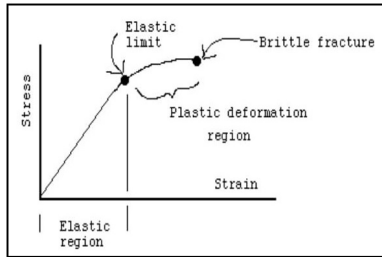
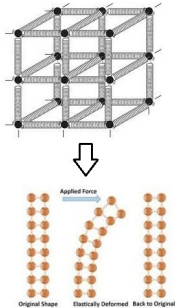


Diamond

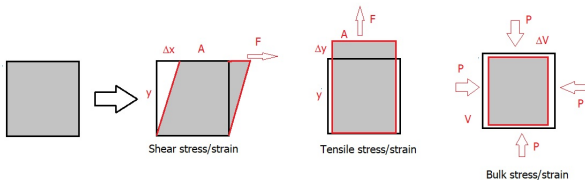


Graphite

► ความยืดหยุ่นของวัตถุแข็ง



► เราศึกษาความยืดหยุ่นของวัตถุแข็งด้วยการวัดความเครียด (strain) ที่เกิดจากความเค้น (stress)



กฎของฮุก

- ▶ กฎของฮุก กล่าวว่า ความเครียดเล็กน้อย จะสัมพันธ์โดยตรงกับความเค้น ที่ใส่เข้าไป

$$\text{Shear} : \frac{F}{A} \propto \frac{\Delta x}{y}, \quad \text{Tensile} : \frac{F}{A} \propto \frac{\Delta y}{y}, \quad \text{Bulk} : P \propto -\frac{\Delta V}{V}$$

- ▶ ความยืดหยุ่นของวัตถุ (modulus)

$$\text{Shear} : \frac{F}{A} = S \frac{\Delta x}{y}, \quad \text{Tensile} : \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta y}{y}, \quad \text{Bulk} : P = B \left(-\frac{\Delta V}{V} \right)$$

เมื่อ

- ▶ S คือความยืดหยุ่นเฉือน (shear modulus)
- ▶ Y คือความยืดหยุ่นดึง (tensile (Young) modulus)
- ▶ B คือความยืดหยุ่นทั้งก้อน (bulk modulus)

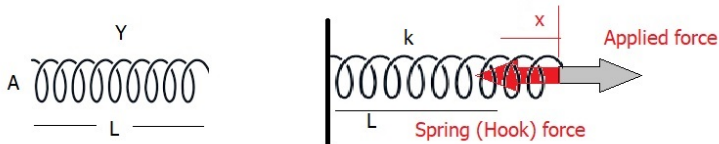
หน่วยของความยืดหยุ่น คือ $N/m^2 = \text{Pascal} : Pa$

▶

Material	Young's modulus (Y) (10^{10} N m^{-2})	Bulk modulus (K) (10^{10} N m^{-2})	Shear modulus (η_R) (10^{10} N m^{-2})
Steel	20.0	15.8	8.0
Aluminium	7.0	7.0	2.5
Copper	12.0	12.0	4.0
Iron	19.0	8.0	5.0
Glass	7.0	3.6	3.0

Material	Youngs Modulus /GPa
Mild Steel	210
Copper	120
Bone	18
Plastic	2
Rubber	0.02

- ▶ เราใช้สปริง เป็นตัวแทนของวัตถุแข็งที่มีความยืดหยุ่น (modulus Y , length L , cross section area A)
- ▶ แรงเค้นดึงบนสปริง F กับแรงดึงกลับจากสปริง (restoring spring (Hook) force) F_s

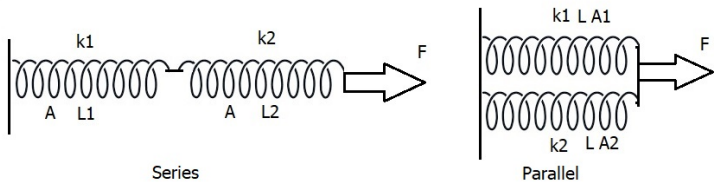


$$\frac{F}{A} = Y \frac{x}{L} \rightarrow F = \frac{YA}{L} x = kx, \quad k = \frac{YA}{L}$$

$$F_s = -F = -kx$$

เมื่อ k คือค่าคงตัวของสปริง (ในหน่วย N/m)

► เมื่อสปริงหลายตัวออกแรงร่วมกัน



$$\text{Series : } k_1 = \frac{YA}{L_1}, k_2 = \frac{YA}{L_2} \rightarrow L = L_1 + L_2 = \frac{YA}{k_1} + \frac{YA}{k_2} \equiv \frac{YA}{k}$$

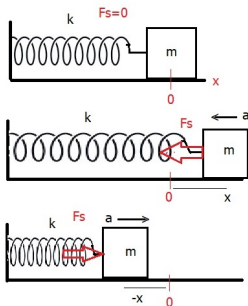
$$\rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\text{Parallel : } k_1 = \frac{A_1 Y}{L}, k_2 = \frac{A_2 Y}{L} \rightarrow A = A_1 + A_2 = \frac{k_1 L}{Y} + \frac{k_2 L}{Y}$$

$$A = \frac{kL}{Y} \rightarrow k = k_1 + k_2$$

การแกว่งกวัดอย่างง่าย

- ▶ พิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ที่ติดปลายสปริง จากแรงกระทำของสปริง k



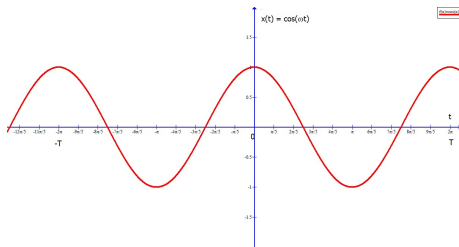
เมื่อวัตถุอยู่ที่ตำแหน่งสมดุล (สปริงไม่มีระยะ ยืด/หด) จะไม่มีแรงจากสปริง เมื่อสปริงมีระยะ ยืด/หด จะมีแรงกระทำจากสปริงในรูปแบบของแรงดึงกลับ (restoring force) สู่ตำแหน่งสมดุล

► เมื่อพิจารณาจากสมการเคลื่อนที่ พบว่า

$$F_s = -kx = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

การคาดเดาคำตอบ ของ $x = x(t)$ ในรูปแบบของฟังก์ชันตรีโกณ

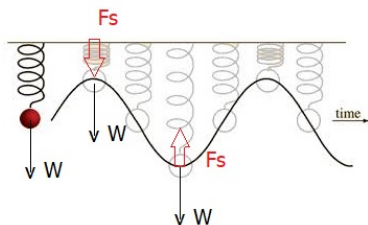
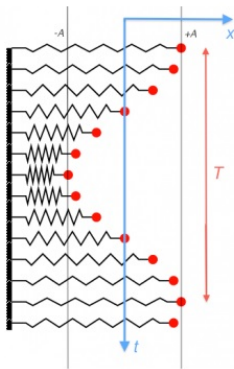
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$



$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t), \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow (k - m\omega^2)x_0 \cos(\omega t) = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

► การแกว่งกวัดอย่างง่าย ของมวลติดปลายสปริง



► เวกลักษณะของการแกว่งกวัด คือ ความถี่ f หรือ คาบเวลา $T = 1/f$

$$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{|F_s|/x}{m}} = \sqrt{\frac{\text{restroing force/distance}}{\text{inertial mass}}}$$

► พลังงานในการแกว่งกวัด

$$K = \frac{1}{2}mv^2, F_s = -kx \rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$x_{max} \text{ at } v = 0 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2E}{k}}, v_{max} \text{ at } x = 0 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

การแกว่งกวัดของมวลติดปลายสปริง

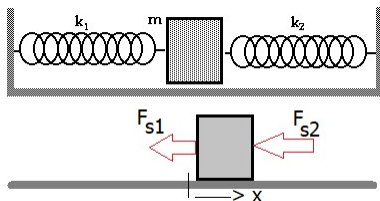
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \rightarrow v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega t)$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}kx_0^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$$

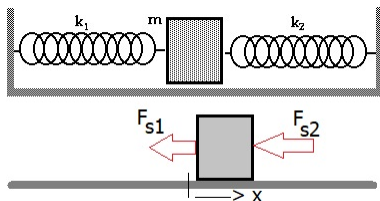
$$\rightarrow x_{max} = x_0, v_{max} = x_0\omega$$

- กรณีตัวอย่าง จากรูป ความถี่ในการแกว่งกวัดของมวล มีค่าเท่าใด?



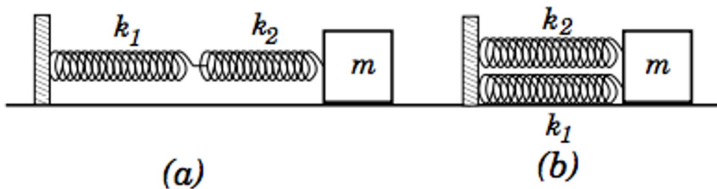
$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = -(k_1 + k_2)x \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

- กรณีตัวอย่าง จากรูป ความถี่ในการแกว่งกวัดของมวล มีค่าเท่าใด?

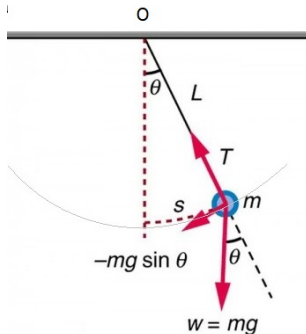


$$F_s = F_{s1} + F_{s2} = -(k_1 + k_2)x \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

- งานในห้อง สำหรับการแกว่งกวัดแบบนี้ จะมีความถี่เท่าไร?



► เพนดูลัม (ลูกตุ้มนาฬิกา)



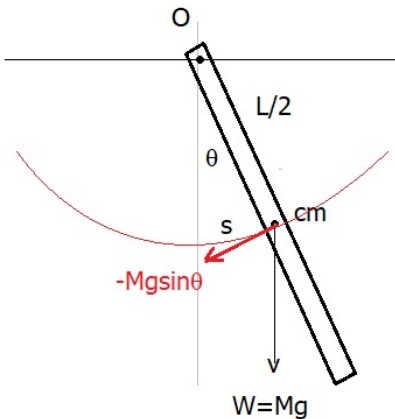
$$F_s = -mg \sin(\theta) \simeq -mg\theta = -\frac{mgs}{L}, \quad \left(\theta \simeq \frac{s}{L}\right)$$

$$\frac{|F_s|}{s} = \frac{g}{L} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ (characteristic)}$$

พิจารณาเพนดูลัมในรูปแบบการหมุนแกว่งกวัด (รอบจุดหมุน O)

$$\tau = -mg \sin \theta L \simeq -mg\theta L, \quad I_0 = mL^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{|\tau|/\theta}{I_0}}$$

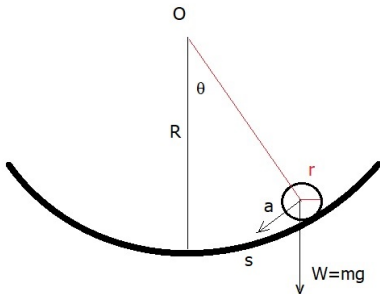
- กรณีตัวอย่าง ท่อนวัตถุมวล M ยาว L มีการหมุนแกว่งกวัด (O) ดังรูป ($I_0 = \frac{1}{3}ML^2$)



$$\tau = -Mg \sin \theta \frac{L}{2} \simeq -Mg \theta \frac{L}{2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

- กรณีตัวอย่าง ล้อตันมวล m รัศมี r ($r \ll R$) ($I'_0 = \frac{1}{2}mr^2$)
เคลื่อนที่ในลักษณะ วิ่งกลับไป-มา ในอ่างวงกลมรัศมี $R \gg r$
ในกรณีผิวในอ่างลื่น ล้อจะไถล (โยไม่หมุน) กลับไป-มา ด้วยความเร่ง
 $a = g \sin \theta$

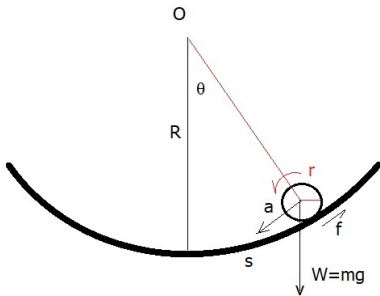
$$F_s = -mg \sin \theta \simeq -mg\theta = -\frac{mgs}{R} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$



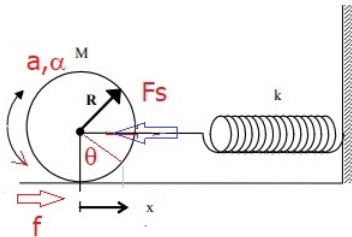
- ในกรณีผิวอย่างไม่มีลิ้น ล้อจะหมุน และวิ่งไป-มา ด้วยความเร่ง

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + I'_0 / mr^2} = \frac{2}{3} g \sin \theta$$

$$F \simeq \frac{2}{3} g \theta = -\frac{2}{3} \frac{mgs}{R} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$



- กรณีตัวอย่าง ล้อตันมวล M รัศมี R ($I_0 = \frac{1}{2}MR^2$) ยึดติดกับสปริง k ที่แกนล้อ บนพื้นที่ไม่ลื่น ล้อจะหมุนแกว่งกวัด ด้วยความถี่เท่าใด?



$$F_s - f = kx - f = Ma \rightarrow f = kx - Ma = kR\theta - MR\alpha$$

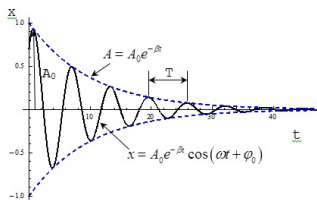
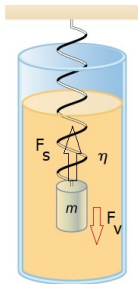
$$fR = I_0\alpha \rightarrow \frac{I_0\alpha}{R} = kR\theta - MR\alpha \rightarrow \alpha = \frac{k\theta}{M(1 + I_0/MR^2)}$$

$$\tau = I_0\alpha \rightarrow \tau/\theta = \frac{kI_0}{M(1 + I_0/MR^2)}$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\tau/\theta}{I_0}} = \sqrt{\frac{k}{M(1 + I_0/MR^2)}}$$

การแกว่งกวัดลดทอน

- การแกว่งกวัดที่มีการลดทอนของการกระจัด และหมายถึงมีการลดทอนของพลังงาน



$$F_v = -\beta v \text{ Stoke's force} \rightarrow ma + \beta v + kx = 0$$

การกระจัดลดทอน ด้วย สปส. การลดทอน β

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

การแกว่งกวัดขั้บตัน

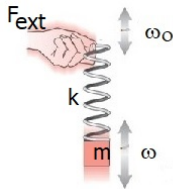
- ▶ เมื่อมีการขั้บตัน (ω_0) การแกว่งกวัดที่มีอยู่แล้ว (ω)

$$ma(t) + kx(t) = F_{ext}(t)$$

$$F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$? \rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$



- ▶ เกิดการพ้อง (resonance) ที่ความถี่ขั้บตัน $\omega = \omega_0$

► การกระจัดที่เกิดการพ้อง

