บรรยาย 7 ปรากฏการณ์คลื่น และคลื่นกล

ทพชท122 วิชาฟิสิกส์ ภาคต้น/2564-65

อุดม รอบคอบ
ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

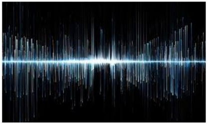
17 ธันวาคม 2564

หัวข้อบรรยาย

- ปรากฏการณ์คลื่น
- ฟังก์ชันคลื่น
- กลศาสตร์ของคลื่นบนเส้นเชือก
- พลังงานคลื่น
- การสะท้อนและแทรกสอด
- คลื่นนิ่ง
- คลื่นเสียง

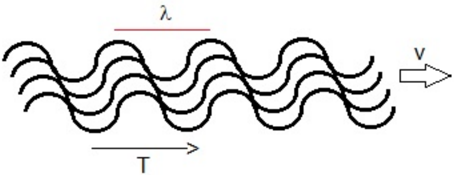
ปรากฏการณ์คลื่น

- ปรากฏการณ์คลื่นในธรรมชาติ ได้แก่ คลื่นน้ำ คลื่นเสียง และคลื่นแสง



- ลักษณะของคลื่น ได้แก่ คลื่นขบวน และ คลื่นเดี่ยว
- การบรรยายคลื่นขบวน ที่มีความเร็วคลื่น v ความยาวคลื่น λ และ ความถี่คลื่น f หรือคาบเวลา $T = 1/f$ ด้วยสมการคลื่น

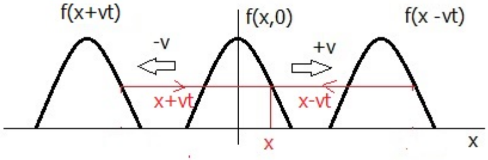
$$v = f\lambda$$



ฟังก์ชันคลื่น

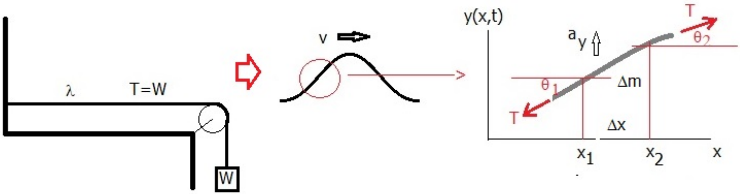
- คลื่นเกิดจากการรบกวนตัวกลางที่มีความยืดหยุ่น ทำให้เกิดการกระจัดของตัวกลาง ในแนวตรง หรือ แนวขวาง ซึ่งแสดงคลื่นในแนวตรง หรือ แนวขวาง ตามลำดับ
- กระกระจัดของตัวกลาง (ที่เกิดจากการรบกวน) ที่ตำแหน่ง x และเวลา t ใดๆ บรรยายลักษณะของคลื่น และเรียกว่า ฟังก์ชันคลื่น (wave function) $f(x, t)$
- ฟังก์ชันคลื่น มีลักษณะพิเศษ ที่แสดงการเดินทางของคลื่น

$$f(x, t) = f(x \mp vt)$$



กลศาสตร์คลื่นบนเส้นเชือก

- พิจารณาคลื่นบนเส้นเชือก มวล m ยาว L $(\lambda = m/L)$ และมีแรงตึงเชือก T



$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 = \Delta m a_y = \Delta m\ddot{y} \quad (1)$$

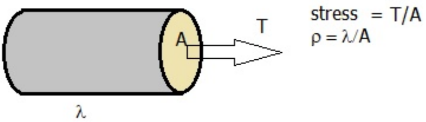
$$\theta \to 0, \sin\theta \simeq \tan\theta = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$T\left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1\right\} = \Delta m\ddot{y} \quad (2)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\Delta x}\left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1\right\} = \frac{1}{T}\frac{\Delta m}{\Delta x}\ddot{y} = \frac{\lambda}{T}\ddot{y} \tag{3}$$

$$y = y(x,t) \rightarrow y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \ \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

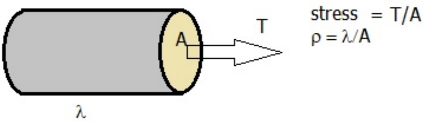
$$y'' - \frac{1}{T/\lambda}\ddot{y} = 0 \rightarrow v^2 = \frac{T}{\lambda} \equiv \frac{modulus}{mass\ \ density} \tag{4}$$



$$\rightarrow \frac{1}{\Delta x}\left\{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_2 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_1\right\} = \frac{1}{T}\frac{\Delta m}{\Delta x}\ddot{y} = \frac{\lambda}{T}\ddot{y} \tag{3}$$

$$y = y(x,t) \rightarrow y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$y'' - \frac{1}{T/\lambda}\ddot{y} = 0 \rightarrow v^2 = \frac{T}{\lambda} \equiv \frac{modulus}{mass\ density} \tag{4}$$



- กรณีตัวอย่าง ความเร็วคลื่นบนเชือกเส้น ($\lambda = 200g/m$) ที่มีแรงตึง T=50N

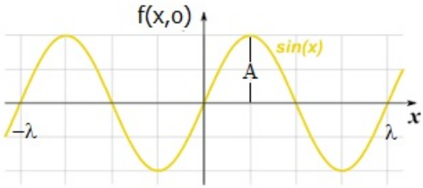
$$v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}} = \sqrt{\frac{50}{0.2}} = 250m/s$$

เช็คหน่วย $[v^2] = N \cdot m/kg = kg \cdot m^2/s^2 = (m/s)^2$

- สมการ (4) คือสมการเชิงกลของคลื่น มีลักษณะเฉพาะ (characteristic) ตัวอย่างของคลื่นระนาบ

$$f(x \mp vt) = A\sin[k(x \mp vt)] = A\sin[kx \mp \omega t]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \;\; kv = \frac{2\pi v}{\lambda} = 2\pi f = \omega \rightarrow v = f\lambda, \;\; kv = \omega$$



$$\ddot{f} = -\omega^2 f, \;\; f'' = -k^2 f \rightarrow (k^2 - \frac{\omega^2}{v^2})f = 0, \;\; \omega = \pm kv$$

$$f(0,t) = \mp A\sin(\omega t) \rightarrow \ddot{f} + \omega^2 f = 0$$

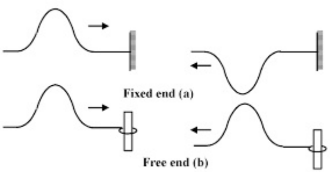
ตัวกลางเกิดการแกว่งกวัดอย่างง่าย ขณะที่มีคลื่นระนาบเดินทางผ่าน

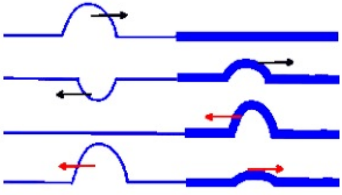
พลังงานคลื่น

- พิจารณาพลังงานของเชือก (λ) ยาว Δx ที่เกิดคลื่นระนาบ
  $y = y_0 \sin(kx - \omega t) \rightarrow \dot{y} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$
  $$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}\Delta m \dot{y}^2 + \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 y^2$$
  $$= \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 y_0^2 \left(\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)\right) = \frac{1}{2}\Delta m \omega^2 y_0^2$$
  $$\rightarrow \mathcal{E} = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2}\lambda \omega^2 y_0^2 \ [J/m]$$
- กำลังงาน (energy flow along with) ในคลื่น
  $$P = \mathcal{E} v = \frac{1}{2}\lambda v \omega^2 A^2 \ [J/s = watt]$$
  ความเข้มกำลังงาน
  $$\mathcal{P} = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{A} v \omega^2 y_0^2 = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 y_0^2 \ [watt/m^2]$$

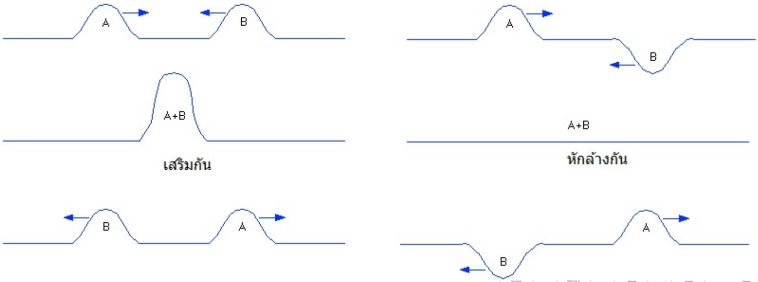
การสะท้อนและแทรกสอดของคลื่นเดี่ยวบนเส้นเชือก

- พิจารณาการสะท้อนของคลื่นเดี่ยว

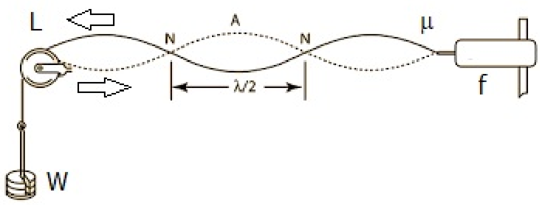




- พิจารณาการแทรกสอดของคลื่นเดี่ยวบนเส้นเชือก



- การสะท้อนและแทรกสอดของคลื่นขบวน บนเส้นเชือก (μ, T) ยาว L และตรึงปลายเชือกทั้งสองด้าน $(v = \sqrt{T/\mu})$



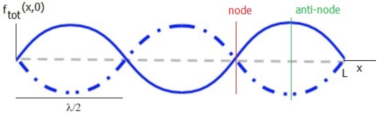
$$f_{tot}(x,t) = f_1(x+vt) + f_2(x-vt) \qquad (5)$$

$$f_{1,2}(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t)$$

$$\rightarrow f_{tot}(x,t) = A[\sin(kx+vt) + \sin(kx-vt)]$$

$$= 2A\sin(kx)\cos(\omega t) \qquad (6)$$

จากการใช้ identity $\sin(A) + \sin(B) = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$

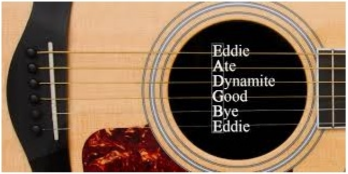


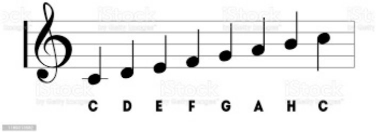
- ผลที่ได้ $f_{tot}(x,t)$ ไม่แสดงความเป็นคลื่น เราเรียกว่าคลื่นนิ่ง (standing wave) พิจารณา $f_{tot}(x,0) = 2A\sin(kx)$

$$f_{tot}(x,0) = 0 \text{ at } x = 0, L \rightarrow L = \frac{n\lambda_n}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} \rightarrow n^{th} - \text{harmonic frequencies}$$

- สายกีตาร์



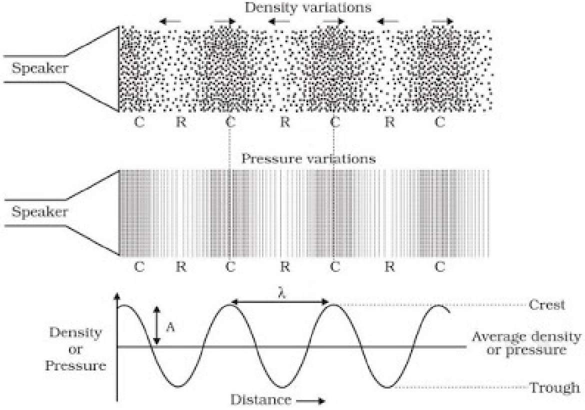


Octave Chart

C	C#/ Dflat	D	D#/ Eflat	E	F	F#/ Gflat	G	G#/ Aflat	A	A#/ Bflat	B	8va
4	4.3	4.5	4.8	5	5.5	5.8	6.1	6.5	6.9	7.3	7.7	
8	8.5	9	9.5	10	10.9	11.5	12.3	12.9	13.8	14.6	15.4	
16	17	18	19	20	21.8	23	24.5	25.9	27.5	29.1	30.8	0
33	34	36	38	41	43.6	46	48.9	51.9	55	58.2	61.7	1
65	69	73	77	82	87.3	92	97.9	103	110	116	123	2
131	138	146	155	164	174	184	195	207	220	233	246	3
261	277	293	311	329	349	369	391	415	440	466	493	4
523	554	587	622	659	698	739	783	830	880	932	987	5
1046	1108	1174	1244	1318	1396	1479	1567	1161	1760	1864	1975	6
2093	2217	2349	2489	2637	2793	2959	3135	3324	3520	3729	3951	7
4186	4434	4698	4978	5274	5587	5919	6271	6644	7040	7458	7902	8

คลื่นเสียง

- คลื่นเสียง เป็นคลื่นตามยาวของการกระจัดในตัวกลาง หรือ คลื่นความดันในตัวกลาง



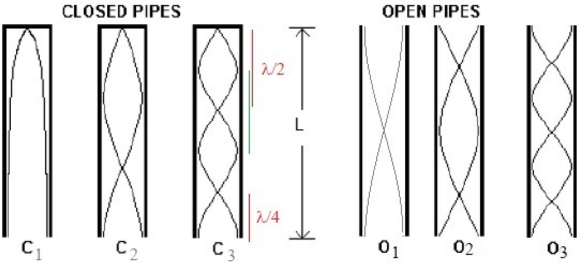
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Material	Density (kg/m^3)*	Material	Density (kg/m^3)*
Air (1 atm, 20°C)	1.20	Iron, steel	7.8×10^3
Ethanol	0.81×10^3	Brass	8.6×10^3
Benzene	0.90×10^3	Copper	8.9×10^3
Ice	0.92×10^3	Silver	10.5×10^3
Water	1.00×10^3	Lead	11.3×10^3
Seawater	1.03×10^3	Mercury	13.6×10^3
Blood	1.06×10^3	Gold	19.3×10^3
Glycerine	1.26×10^3	Platinum	21.4×10^3
Concrete	2×10^3	White dwarf star	10^{10}
Aluminum	2.7×10^3	Neutron star	10^{18}

Substance	Bulk Modulus (MPa)
Water	2 200
Air	0.142
Steel	1.6×10^5
Solid Helium	50
Glass	3.5×10^4 to 5.5×10^4

$$v_{air} = \sqrt{\frac{1.42 \times 10^5}{1.20}} = 344 m/s$$

- คลื่นนิ่งของคลื่นเสียง



$$\text{Closed :} \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)}{4}L \tag{7}$$

$$\text{Opened :} \quad \lambda_n = \frac{n}{2}L \tag{8}$$

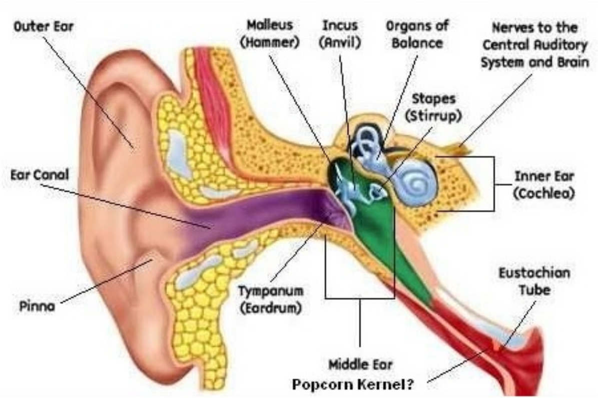
$$\text{Harmonic frequencies :} \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} \tag{9}$$

Harmonic order: $n = 1, 2, 3, ...$

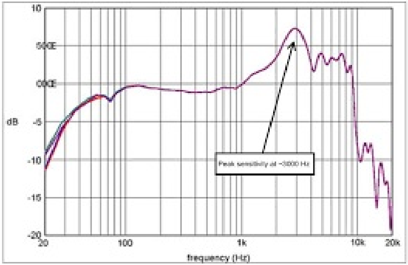
- ความเข้มกำลังงานเสียง (คลื่นการกระจัดของตัวกลาง)

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\rho v A^2\omega^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}A^2\omega^2 \ [watt/m^2]$$

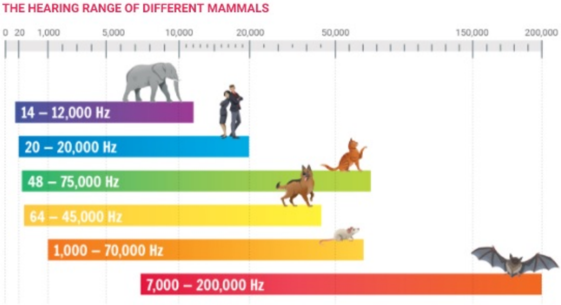
- หู (ear) กับการได้ยิน

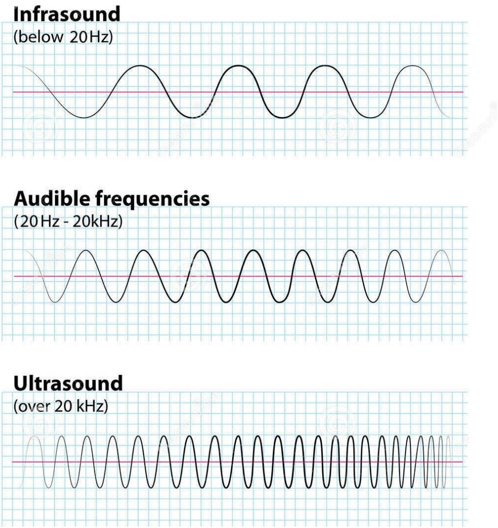


- ช่วงความถี่ที่ได้ยิน



Frequency response of the human ear





Infra-sound –> fear (movie)

Ultra-sound –> medical imaging (2D, 3D, 4D, HD)

- ความเข้มกำลังงานเสียงขีดเริ่มของการได้ยิน (threshold of hearing)

$$\mathcal{P}_0 = 10^{-12} W/m^2$$

Calculate the displacement of air molecules for a sound having a frequency of 1000 Hz at the threshold of hearing.

$$\mathcal{P}_0 = (1/2)\rho v \omega^2 A^2 = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\mathcal{P}_0}{2\pi^2 \rho v f^2} \Rightarrow A = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{\mathcal{P}_0}{2\rho v}}$$

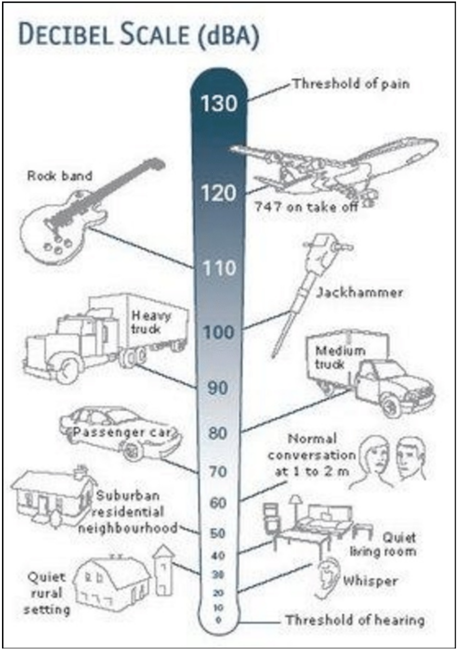
$$A = \frac{1}{1000\pi}\sqrt{\frac{10^{-12}}{2\times 1.29\times 343}} = 1.1\times 10^{-11} m$$

- ระดับความดังเสียง (เดซิเบล dB)

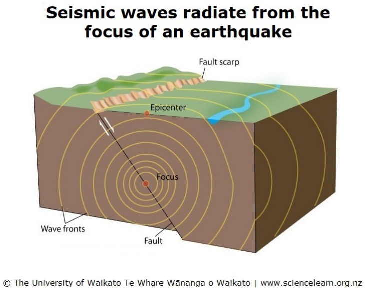
$$L(dB) = 10 \log \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0}$$

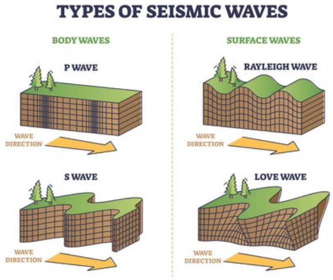
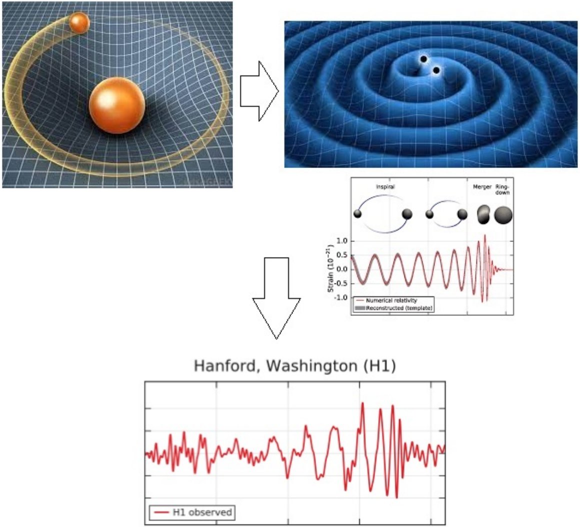
Source	Intensity	Intensity level	× TOH
Threshold of hearing (TOH)	10^{-12}	0 dB	1
Whisper	10^{-10}	20 dB	10^{2}
Pianissimo	10^{-8}	40 dB	10^{4}
Normal conversation	10^{-6}	60 dB	10^{6}
Fortissimo	10^{-2}	100 dB	10^{10}
Threshold of pain	10	130 dB	10^{13}
Jet take-off	10^{2}	140 dB	10^{14}
Instant perforation of eardrum	10^{4}	160 dB	10^{16}

Table 1.1 from [Müller, FMP, Springer 2015]


DECIBEL SCALE (dBA)
Threshold of pain
130
120
747 on take off
Rock band
110
Jackhammer
Heavy truck
100
Medium truck
90
Passenger car
80
Normal conversation at 1 to 2 m
70
60
Suburban residential neighbourhood
50
40
Quiet living room
30
Quiet rural setting
Whisper
20
10
0
Threshold of hearing

คลื่นแผ่นดินไหว





คลื่นความโน้มถ่วงจากอวกาศ