

บรรยาย 8 ของไหลสถิตย์ และการไหลต่อเนื่อง

ทพชท122 ภาคต้น ปีการศึกษา 2564-65

อุดม รอบคอบ, ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ ม.มหิดล

24 ธันวาคม 2564

หัวข้อบรรยาย

- ▶ ธรรมชาติของของไหล
- ▶ ความดันในของไหล
- ▶ แรงลอยตัว
- ▶ แรงตึงผิว
- ▶ การไหลต่อเนื่อง
- ▶ ความหนืด

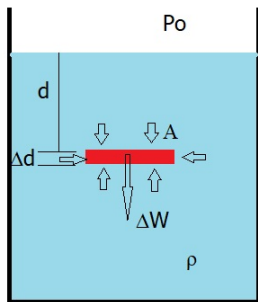
ธรรมชาติของของไหล

- ▶ ของไหลคืออะไร? ของไหล (fluid) คือสสารที่สามารถไหล (flow) ได้แก่ ของเหลว และก๊าซ ทั้งสองมีความแตกต่างตรงที่
 - ▶ ก๊าซสามารถถูกบีบอัดได้ (compressible)
 - ▶ ของเหลวไม่สามารถถูกบีบอัดได้ (incompressible)
- ▶ เราจะบรรยายการไหลในเบื้องต้น กับระบบของเหลว เนื่องจากแรงที่กระทำบนของเหลว จะทำให้เกิดการไหล ไม่มีส่วนที่ทำให้เกิดการหดตัวจากการถูกบีบอัด
- ▶ การบรรยายของเหลวที่มีรูปทรงตามภาชนะที่ใช้บรรจุ และไม่คำนึงถึงกลิ่นและสี กระทำได้ด้วยการระบุของเหลวด้วยความหนาแน่นมวล (mass density) $\rho = m/V$ [kg/m^3]

Material Solids	Density(kgm^{-3})	Material Liquids	Density(kgm^{-3})
Gold	19300	Water	1000
Uranium	19050	Mercury	13546
Copper	8930	Methyl alcohol	792
Iron	7870		
Steel	7860	Gases	
Marble	2600	Chlorine	3.2
Concrete	2400	Carbon Dioxide	1.98
Brick	2300	Air	1.3
Wood (oak)	650	Helium	0.18

ความดันในของเหลว

- ▶ การไม่มีรูปทรงที่แข็งแรง ทำให้เกิดการทับถมของน้ำหนักด้านบนลงบนด้านล่าง ซึ่งเป็นแรงกดทับที่แปรผันตามระดับความลึกภายในของเหลว เราจะพิจารณาแรงนี้ในรูปแบบ ของความดันภายในของเหลว (pressure in depth) $P(d)$
- ▶ พิจารณาส่วเล็กๆ ภายในของไหลที่ระยะความลึก d จากผิว มีปริมาตร $\Delta V = A\Delta d$



$$F_{\rightarrow} - F_{\leftarrow} = 0 \quad (1)$$

$$F_{\uparrow} = F_{\downarrow} + \Delta W$$

$$\begin{aligned} [P(d + \Delta d) - P(d)] A \\ = \rho g A \Delta d \quad (2) \end{aligned}$$

$$P(d) - P(0) = \rho g d \quad (3)$$

$$(After : d = 0, \Delta d = d - 0)$$

- ▶ สมการ (3) แสดงความดันภายในของเหลวที่ระดับความลึก d จากผิวด้านบน มีหน่วยเป็น $N/m^2 = Pascal : Pa$
- ▶ เราเรียก $P(d)$ ว่าความดันสมบูรณ์ (absolute pressure) และเรียก $P(d) - P(0)$ ว่าความดันเกจ (gauge pressure)
- ▶ ในกรณีนี้ $P(0) = P_{air} = 1.01 \times 10^5 Pa \equiv 1 atm$, (atm = atmospheric pressure)
- ▶ กรณีตัวอย่าง ความดันเกจภายใต้ผิวน้ำที่ระดับความลึก ก) 1.0 ม และ ข) 10.0 ม

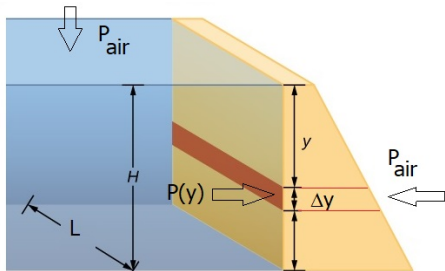
$$\rho_{water} = 1000 kg/m^3 = 10^3 kg/m^3$$

$$\rightarrow P(1m) = 1.01 \times 10^5 + 10^3 \times 10 \times 1 = 10^4 Pa = 1.11 \times 10^5 Pa$$

$$P(10m) = 1.01 \times 10^5 + 10^3 \times 10 \times 10 = 2.01 \times 10^5 Pa \equiv 2 atm$$

ความดันภายใต้ผิวน้ำ จะเพิ่มขึ้น 1atm ทุกๆ ระยะความลึก 10m

- ▶ แรงดันสะสม ในกรณีเขื่อนกั้นน้ำที่มีความสูง H กว้าง L
แรงดันน้ำบนเขื่อนจะมีค่าแตกต่างกันตามระดับความลึก y ของน้ำ

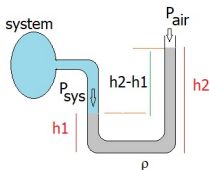


$$\Delta F(y) = P(y)L\Delta y = \rho_w g y L \Delta y$$

$$F_{\text{tot}}(H, L) = \sum \Delta F(y) = \rho_w g L \sum_0^H y \Delta y = \rho_w g L \int_0^H y dy = \frac{1}{2} \rho_w g L H^2$$

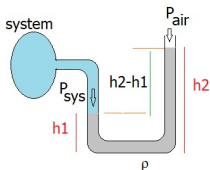
แรงดันบนเขื่อนกั้นน้ำ กว้าง L ลึก H จะมีแรงดันบนเขื่อน
แปรผันตามกำลังสอง ระดับความลึก $F(H) \propto H^2$

- ▶ มาตรวัดความดัน (manometer = pressure gauge) แบบของเหลว (ρ) ในท่อรูปตัวยู



$$P_{sys} + P(h_1) = P_{air} + \rho g h_2$$
$$\rightarrow P_{sys} = P_{air} + \rho g (h_2 - h_1)$$

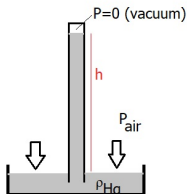
- ▶ มาตรวัดความดัน (manometer = pressure gauge) แบบของเหลว (ρ) ในท่อรูปตัวยู



$$P_{sys} + P(h_1) = P_{air} + \rho g h_2$$

$$\rightarrow P_{sys} = P_{air} + \rho g (h_2 - h_1)$$

- ▶ มาตรวัดความดันอากาศ (Barometer) ของเหลวปรอท (Hg)
 $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$



$$P_{air} = \rho_{Hg} g h$$

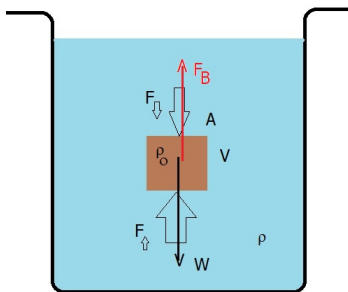
$$1.01 \times 10^5 \text{ Pa} = (13.6 \times 10^3)(9.8)h$$

$$h = 0.758 \text{ m} = 758 \text{ mm(Hg)}$$

$$P_{air}(\text{mmHg}) = 758 \text{ mm}$$

แรงลอยตัว

- ▶ เมื่อวัตถุจมอยู่ในของเหลว จะมีความต่างระหว่างความดันในของเหลวที่ผิวด้านบน และผิวด้านล่าง เป็นทำให้มีแรงยกวัตถุ ในของเหลว ซึ่งเรียกกันว่า แรงลอยตัว (buoyant force: F_B)



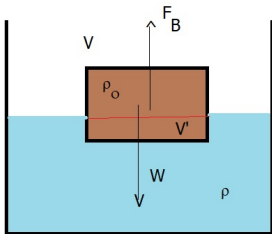
$$W = \rho_0 g V, F_B = \rho g V$$

$$\text{Float up : } F_B > W, \rho > \rho_0 \quad (5)$$

$$\text{Sink down : } F_B < W, \rho < \rho_0 \quad (6)$$

$$\text{Equilibrium : } F_B = W, \rho_0 = \rho \quad (7)$$

▶ วัตถุจมบางส่วนในของเหลว

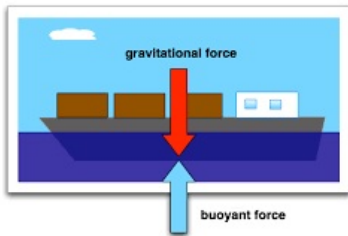


$$W = \rho_0 g V, F_B = \rho g V'$$

Surface float : $F_B = W$

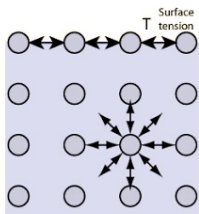
$$\rho_0 g V = \rho g V' \rightarrow \rho_0 = \rho \frac{V'}{V} \quad (8)$$

- ▶ ระวางชั้นน้ำของเรือเดินสมุทร = นน. บรรทุกของเรือ = นน.
ของน้ำที่ถูกเรือจมลงแทนที่

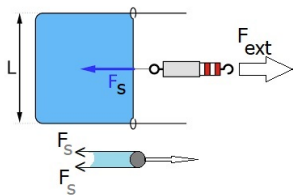


แรงตึงผิว

- ▶ แรงพันธะระหว่างโมเลกุลของเหลวที่ผิว สร้างตึงผิวของของเหลวนั้น



- ▶ เราวัดค่า ความตึงผิว (surface tension) γ ได้ด้วย tensiometer ซึ่งมีหลักการทำงาน ดังรูป



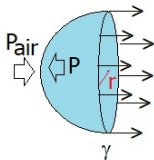
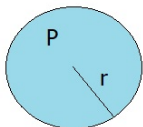
$$\text{Balanced force : } 2F_s = F_{ext}$$

$$\rightarrow F_s = \gamma L, [\gamma] = N/m$$

▶ ตัวอย่างค่าความตึงผิว

Substance	Surface Tension (N/m)
Mercury (20°C)	0.44
Blood, whole (37°C)	0.058
Blood, plasma (37°C)	0.073
Alcohol, ethyl (20°C)	0.023
Water (0°C)	0.076
(20°C)	0.072
(100°C)	0.059
Benzene (20°C)	0.029
Soap solution (20°C)	≈ 0.025
Oxygen (-193°C)	0.016

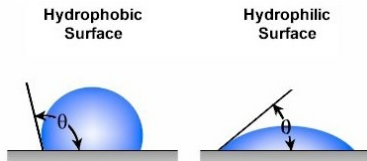
▶ กรณีตัวอย่าง ความดันเกจภายในหยดน้ำรัศมี r



$$(P - P_{air})\pi r^2 = 2\pi r\gamma$$

$$P - P_{air} = \frac{2\gamma}{r}$$

- ▶ ปฏิกิริยาการเปียก (wetting) การเปียก ของของเหลวบนผิววัสดุ พิจารณาได้จากมุมสัมผัส (contact angle θ) ระหว่างผิวของเหลว กับ ผิววัสดุ

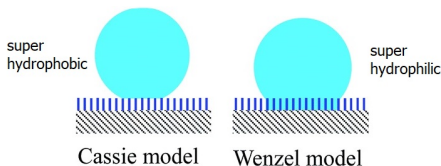


ซึ่งแยกแยะได้เป็น

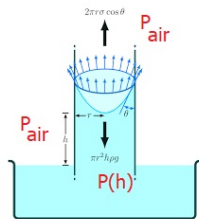
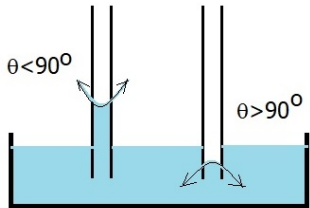
- ▶ การเปียก (hydrophilic) เมื่อ $\theta < 90^\circ$
- ▶ การไม่เปียก (hydrophobic) เมื่อ $\theta > 90^\circ$



ลดหรือเพิ่มการเปียกได้ด้วยการจัดการโครงสร้างของผิววัสดุที่เหมาะสม

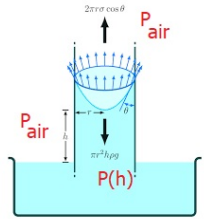
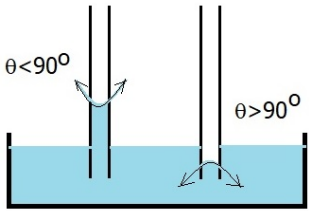


▶ ปรากฏการณ์ของเหลวในท่อขนาดเล็ก (capillarity effect)

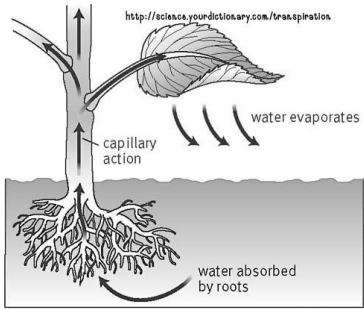


$$\rho g h \pi r^2 = 2 \pi r \gamma \cos \theta \rightarrow h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

▶ ปฏิกิริยาของเหลวในท่อขนาดเล็ก (capillarity effect)

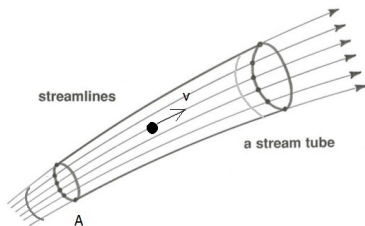


$$\rho g h \pi r^2 = 2 \pi r \gamma \cos \theta \rightarrow h = \frac{2 \gamma \cos \theta}{\rho g r}$$



การไหลต่อเนื่อง (steady flow)

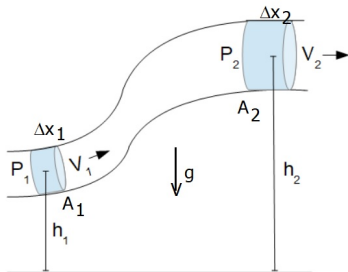
- ▶ การไหลต่อเนื่องของของไหล แสดงได้ด้วยเส้นทางเดินที่ต่อเนื่อง (ไม่ขาด ไม่แยก ไม่รวม) ของอนุภาคภายในของไหล
- ▶ เส้นทางเดินเหล่านี้ ถูกเรียกว่า สายกระแส (stream line)



- ▶ เราสามารถบรรยาย การไหลอย่างต่อเนื่อง ของของเหลวที่ไม่สามารถถูกบีบอัดได้ด้วย กฎการอนุรักษ์มวลสาร (ปริมาตร) ในขณะที่ไหลได้ดังนี้

$$Av = \text{constant} \rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$$

- นอกจากนั้นเรายังสามารถบรรยาย การไหลได้ด้วยกฎการอนุรักษ์พลังงาน ดังนี้



$$\begin{aligned}
 & P_1(A_1\Delta x_1) + \frac{1}{2}\rho(A_1\Delta x_1)v_1^2 + \rho(A_1\Delta x_1)gh_1 \\
 & = P_2(A_2\Delta x_2) + \frac{1}{2}\rho(A_2\Delta x_2)v_2^2 + \rho(A_2\Delta x_2)gh_2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

$A_1\Delta x_1 = A_2\Delta x_2 = \Delta V$ ปริมาตรของไหลคงตัว

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

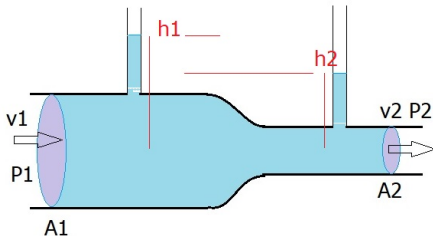
- ▶ สมการที่ไหล เป็นสมการบรรยายการไหลต่อเนื่องของของเหลว มีชื่อว่า สมการแบร์นูลลี (Bernoulli equation)

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constant}$$

- ▶ สมการที่ไหล เป็นสมการบรรยายการไหลต่อเนื่องของของเหลว มีชื่อว่า สมการแบร์นูลลี (Bernoulli equation)

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constant}$$

- ▶ กรณีตัวอย่าง การไหลในท่อแนวราบ ต่างขนาด (A_1/A_2)

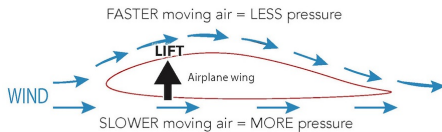


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

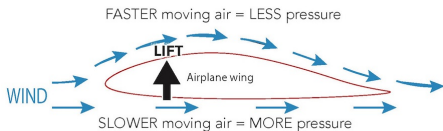
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow A_1 > A_2, v_1 < v_2 \rightarrow P_1 > P_2$$

ไหลช้า ความดันสูง/ไหลเร็ว ความดันต่ำ

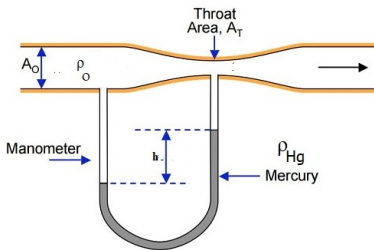
▶ แรงยกปีกเครื่องบิน



▶ แรงยกปีกเครื่องบิน



▶ มาตรวัดอัตราการไหล (Venturi meter)



$$P_0 + \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 = P_T + \frac{1}{2}\rho_0 v_T^2$$

$$v_T = \frac{A_0}{A_T} v_0 = r v_0$$

$$\rightarrow P_0 - P_T = \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2 (r^2 - 1)$$

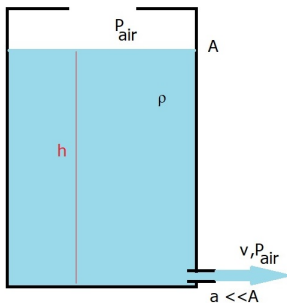
$$\equiv \rho_{Hg} g h$$

$$H = v_0 A_0 = \sqrt{\frac{2\rho_{Hg} g h}{\rho_0 (r^2 - 1)}} [m^3/s]$$

▶ มาตรเหินทุรี ใช้งานจริง



▶ กรณีตัวอย่าง น้ำไหลออกจากถังฝาเปิด



$$P_1 = P_{air} = P_2$$

$$A_1 = A \gg A_2$$

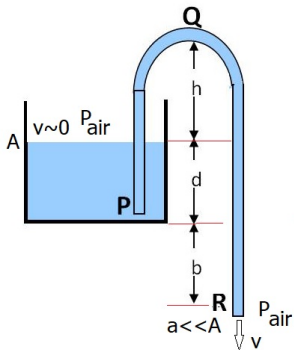
$$\rightarrow v_1 \simeq 0, v_2 = v$$

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad (10)$$

ค่าเดียวกับความเร็วในการตกอิสระ 

► กรณีตัวอย่าง กาลักน้ำ (siphon)



$$0 \leq h \leq h_{max}$$

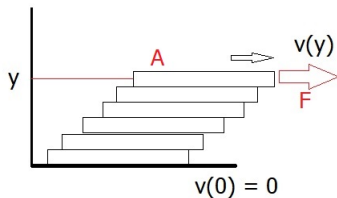
$$\rightarrow v = \sqrt{2g(d + b)}$$

$$\text{At } h_{max} \rightarrow v = 0$$

$$P_{air} = \rho g h_{max} \rightarrow h_{max} = \frac{P_{air}}{\rho g} \quad (11)$$

ความหนืดในของไหล

- ▶ ความหนืด (viscosity: η) ในของไหล เกิดจากแรงดึงดูดระหว่างโมเลกุล ของไหลที่มีมาก
- ▶ เราอธิบายการไหลของของไหลที่มีความหนืด จากมุมมองของการไหลเป็นชั้นๆ (laminar flow)



ความเค้นเฉือน สัมพันธ์กับ อัตราการเสียรูปทรงในแนวเฉือน และ ความหนืดของของไหล

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{y}, \quad [\eta] = Pa \cdot s$$

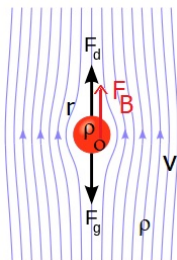
▶ ตัวอย่างค่าความหนืด

Substance	η (Pa.s)
Air	10^{-5}
Water	10^{-3}
Ethyl alcohol	1.2×10^{-3}
Mercury	1.5×10^{-3}
Ethylene glycol	20×10^{-3}
Olive oil	0.1
100% Glycerol	1.5
Honey	10
Corn syrup	100
Bitumen	10^8
Molten glass	10^{12}

▶ ตัวอย่างค่าความหนืด

Substance	η (Pa.s)
Air	10^{-5}
Water	10^{-3}
Ethyl alcohol	1.2×10^{-3}
Mercury	1.5×10^{-3}
Ethylene glycol	20×10^{-3}
Olive oil	0.1
100% Glycerol	1.5
Honey	10
Corn syrup	100
Bitumen	10^8
Molten glass	10^{12}

▶ แรงหนืดของสโต๊ก (drag force) บนวัตถุทรงกลม



Balanced forces :

$$F_g = F_d + F_B$$

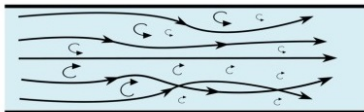
$$F_d = 6\pi\eta rv \quad (12)$$

- ▶ การไหลของของไหลที่มีความหนืดในท่อ จะมีการไหลเป็นชั้นๆ (laminar flow) ซึ่งมีขีดจำกัดของความเร็วการไหล ถ้าไหลเร็วเกินไป จะเกิดการปั่นป่วน (turbulent flow)

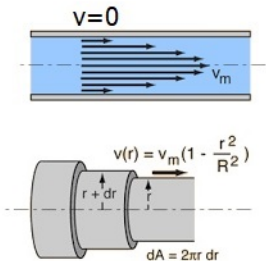
laminar flow



turbulent flow



▶ อัตราการไหล



$$v(0) = V_m, v(R) = 0$$

$$v(r) = v_m(1 - r^2/R^2) \quad (13)$$

$$dH(r) = v(r)dA(r)$$

$$= v_m 2\pi(1 - r^2/R^2)rdr$$

$$H = \int_0^R dH(r) = \frac{1}{2} v_m \pi R^2 \quad (14)$$

$$\{v_m = \Delta P R^2 / 4\eta L\}$$

ความต้านทานการไหล

$$H = \frac{\Delta P}{R} \rightarrow R = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \quad (15)$$

► ความต่างแรงดัน ΔP เพื่อสร้างการไหล

