บรรยาย 18 ทฤษฎีสัมพัทธ์ภาพของไอน์สไตน์

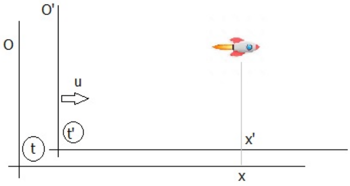
SCPY152, ฟิสิกส์-คณะวิทย์-มหิดล, ภาคปลาย 2564-65

อุดม รอบคอบ

30 มีนาคม 2565

สัมพัทธ์ภาพของกาลิเลโอ

- หลักสัมพัทธ์ภาพ เชื่อมโยงข้อมูลการเคลื่อนที่ระหว่างสองกรอบเฉื่อยที่มีความเร็วสัมพัทธ์ u ซึ่งกันและกัน



$$x = x' + ut', \quad x' = x - ut \tag{1}$$

$$t = t', \quad v = v' + u, \quad v' = v - u \tag{2}$$

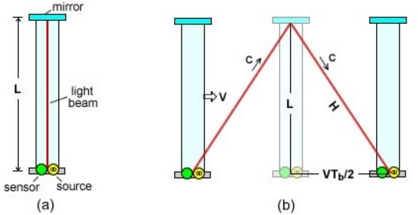
$$a = a' \tag{3}$$

- ข้อเข้มแข็ง - เป็นพื้นฐานของกฎข้อที่ 1 ของนิวตัน
- ข้อบกพร่อง - ไม่กำหนดขอบเขตของความเร็วสัมพัทธ์ u

สัมพัทธ์ภาพของไอน์สไตน์

- กำหนดขอบเขตของความเร็วสัมพัทธ์ที่ความเร็วแสง $u \leq c$ (วัตถุ หรือ อนุภาค ที่เดินทางด้วยความเร็วเหนือแสง (และไม่สามารถสังเกตุเห็นได้) ถูกเรียกว่า *ทาคิออน (tachyon)*)
- สมมติฐานของไอน์สไตน์
  1. กฎของนิวตันยังเป็นจริง
  2. ผู้สังเกตุจากทุกกรอบเฉื่อย เห็นแสงเดินทางด้วยความเร็ว c เท่ากัน ($c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$)
- ผลกระทบจากสัมพัทธ์ภาพของไอน์ไตน์ (พิจารณาจากการทดลองในความคิด (though experiment))
  - การยืดยาวของระยะเวลา (time dilation)
  - การหดสั้นของระยะทาง (length contraction)

- การยืดขยายของระยะเวลา



$$O'(rest) \qquad \Delta t' = \frac{2L}{c} \equiv \Delta t_0 \tag{4}$$

$$O(moving) \qquad \Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{L^2 + (u\Delta t/2)^2}$$

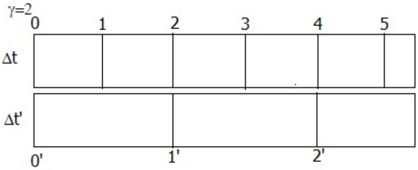
$$\Delta t\sqrt{1-(u/c)^2} = \frac{2L}{c} = \Delta t_0$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \gamma \Delta t_0 \tag{5}$$

เมื่อ $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \ \beta = u/c$

- Δt คือเวลาที่แท้จริง (proper time) ส่วน $\Delta t'$ คือเวลาที่ยืดขยาย (dilate time) ในกรณี $\gamma = 2$

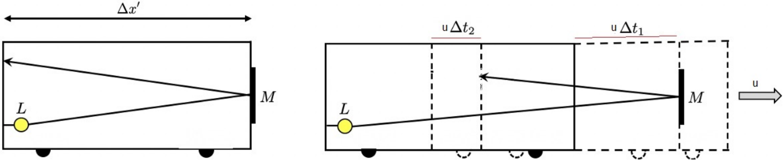
$$\gamma = 2 \mapsto \beta = \sqrt{1 = 1/\gamma^2} = \sqrt{0.75} = 0.866c$$



- กรณีตัวอย่าง Pion (u=0.998c) ถูกค้นพบในชั้นบรรยากาศของโลก และถูกวัดเวลาช่วงชีวิตได้เท่ากับ $\tau = 2.6 \times 10^{-8} s$ ถ้าเวลาช่วงชีวิตนี้เป็นเวลาที่ยืดยาว เวลาช่วงชีวิตที่แท้จริงของ Pion จะเท่ากับ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.998)^2}} = 15.8 \mapsto \tau_0 = \frac{2.6 \times 10^{-8}}{15.8} = 1.64{\times}10^{-9} s$$

- การหดสั้นของระยะทาง



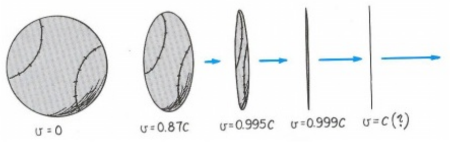
$$O'(rest) \qquad \Delta t' = \frac{2\Delta x'}{c} = \frac{2\Delta x_0}{c} \tag{6}$$

$$O(moving) \qquad \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{c(1-u/c)} + \frac{\Delta x}{c(1+u/c)}$$

$$= \frac{2\Delta x}{c}\frac{1}{1-(u/c)^2} = \frac{2\Delta x}{c}\gamma^2 \tag{7}$$

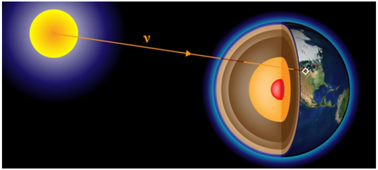
$$\Delta t = \gamma \Delta t' \qquad \mapsto \Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x' = \frac{1}{\gamma}\Delta x_0 \tag{8}$$

- การหดสั้นของระยะทาง (การแสดง)



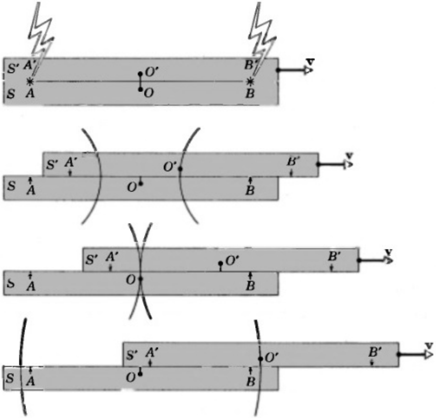
- โลกมีรัศมี 6372km ($D_0 = 12742km$) อนุภาคนิวตริโนจากดวงอาทิตย์เดินทางผ่านโลกด้วยความเร็ว $u = 0.999976c$ ระยะทางที่นิวตริโนวิ่งผ่านโลกจะเป็นดังนี้

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.999976)^2}} = 144 \mapsto D = \frac{12742}{144} = 88.3km$$



ปัญหาของการมองเห็นพร้อมกัน (simultaneity)

- การทดลองทางความคิด



- ผู้สังเกตุที่จะมองเห็นสองเหตุการณ์เกิดพร้อมกัน ต้องเป็นผู้สังเกตุที่เคลื่อนที่สัมพัทธ์กับเหตุการณ์ทั้งสอง

การแปลงโลรองซ์

- คณิตศาสตร์ ที่รองรับหลักสัมพัทธ์ภาพของไอน์สไตน์ ถูกสเนอโดย เฮนดริก โลรองซ์ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$O \mapsto (t, x, y, z) \qquad O' \mapsto (t', x', y', z') \tag{9}$$

$$ct = \gamma(ct' + \beta x') \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{10}$$

$$x = \gamma(x' + \beta ct') \qquad x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{11}$$

$$y = y', z = z' \qquad \beta = \frac{u}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{12}$$

การยืดขยายของเวลา:

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta \Delta x') \xrightarrow[\Delta x'=0, \Delta t'=\Delta t_0]{} \gamma c \Delta t_0$$

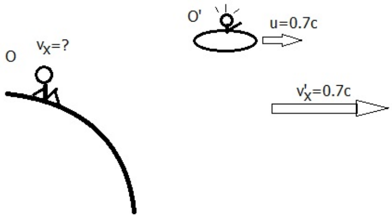
การหดสั้นของระยะทาง:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) \xrightarrow[\Delta t=0, \Delta x \neq \Delta x_0, \Delta x'=\Delta x_0]{} \gamma \Delta x$$

- (10) = Lorentz boost, (11) = Lorentz translation, (10+11) = Lorentz rotation (complex angle)
- Einstein addition of velocity

$$
\begin{aligned}
c\Delta t &= \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x') = \gamma c\Delta t'\left(1 + \beta\frac{v_x'}{c}\right) && (13)\\
\Delta x &= \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t') = \gamma c\Delta t'\left(\frac{v_x'}{c} + \beta\right) && (14)\\
\mapsto \frac{v_x}{c} &= \frac{v_x'/c + \beta}{1 + \beta v_x'/c} \xrightarrow[\beta\to 0]{} v_x'/c + \beta && (15)\\
\mapsto \frac{v_x'}{c} &= \frac{v_x/c - \beta}{1 - \beta v_x/c} \xrightarrow[\beta\to 0]{} v_x/c - \beta && (16)
\end{aligned}
$$

- ตัวอย่าง



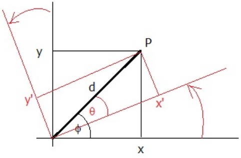
$$v'_x = 0.7c, u = 0.7c \mapsto v_x = \frac{0.7c + 0.7c}{1 + (0.7)(0.7)} = 0.94c$$

Space-Time geometry

- Euclidean space $E^3 = (x, y, z)$, distance square is defined to be

$$d^2 := x^2 + y^2 + z^2$$

x-y plane rotation



$$x = d \cos \phi, \;\; y = d \sin \phi \tag{17}$$

$$x' = d \cos(\phi - \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta \tag{18}$$

$$y' = d \sin(\phi - \theta) = -x \sin \theta + y \cos \theta \tag{19}$$

$$z = z' \mapsto d'^2 = d^2 \tag{20}$$

- Euclidean space E^3 (cont.)

  Matrix form of xy-rotation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{21}$$

- Minkowski space $M^4 = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3,$ the distance square is defined to be

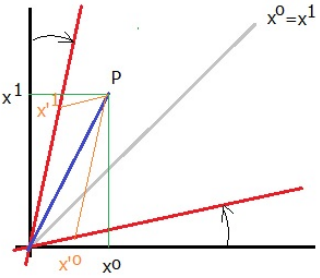
$$d^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

  Rotation on 01-plane, with complex angle $i\varphi$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$x'^2 = x^2, x'^3 = x^3 \mapsto d'^2 = d^2 \tag{23}$$

- Minkowski space M^4 (cont.)



- M^4 as underline space-time geometry for special relativity

$$M^4 = (ct, x, y, z),\ \ \gamma = \cosh\varphi,\ \ \gamma\beta = \sinh\varphi \mapsto \beta = \tanh\varphi \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & -\sinh\varphi \\ -\sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$y' = y,\ \ z' = z \quad (26)$$

- M^4 as underline geometry (cont.)
  The distance square is invariant

$$\begin{aligned} d'^2 &= (ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 \\ &= (ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi)^2 - (x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi)^2 - y^2 - z^2 \\ &= (ct)^2(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi) - x^2(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi) - y^2 - z^2 \\ &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = d^2 \end{aligned} \tag{27}$$

$$x' = 0, y' = 0, z' = 0 \mapsto t' = \tau \tag{28}$$

  - The proper time τ is invariant quantity under Lorentz transformation
  - Rotation on 01-plane = Lorentz boost

- Equip space with metric tensor to learn its geometry
  - $E^3 = (x, y, z) = \{x^i\}, i = 1, 2, 3$, its meric tensor is defined to be

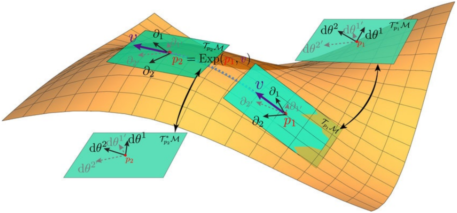
    $$g_{ij} = diag.(+1, +1, +1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto d^2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x^i x^j$$

    Geometry of space $\rightarrow$ curvature + torsion, all are calculate from g_{ij} by some differentiation (differential geometry)
    Curvature = 0 $\mapsto$ flat space, i.e., E^3 is flat
  - $M^4 = (ct, x, y, z) = x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$, its metric tensor is defined to be

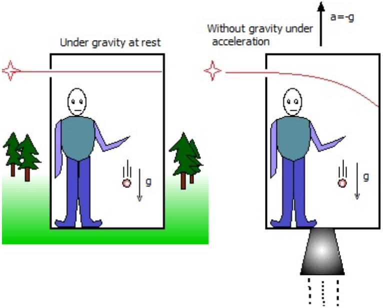
    $$g_{\mu,\nu} = diag.(+1, -1, -1, -1) \mapsto d^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

    M^4 is also flat
  - Curved space will equipped with $g_{AB}(x) \mapsto$ non-zero curvature, $A, B = 0, 1, 2, ...D - 1$, a Riemannian space with dimension D

- Riemannian space of dimensions $D = 2$



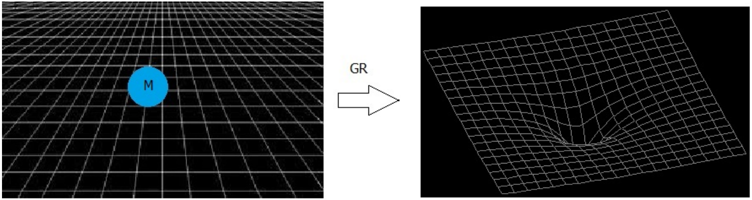
- How do we observe curve space under acceleration, it is *equivalence principle underlying general theory of relativity*



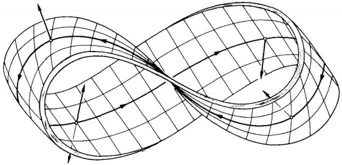
- It is the underline geometry for general theory of relativity (GR)

$$\underbrace{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}}_{Riemannian\ \ curvature\ \ tensor} \equiv G^{\mu\nu} = 8\pi G \underbrace{T^{\mu\nu}}_{mass-energy\ \ tensor}$$

- Gravity when viewed from GR



- Unimaginable spaces
  - Mobius strip



  - Klein bottle