

บรรยาย 21 แบบจำลองนิวเคลียส

และกระบวนการสลายตัว

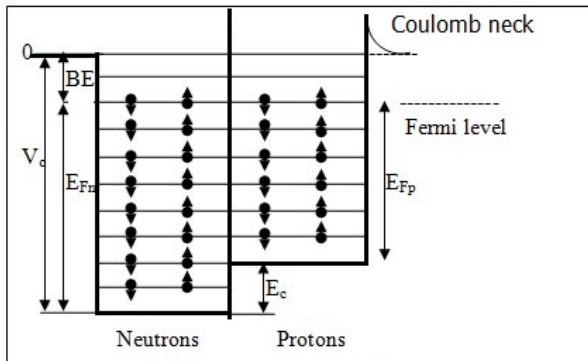
SCPY152, ฟิสิกส์-คณะวิทยาศาสตร์-มหิดล, ภาคปลาย 2564-65

อุดม รอบคอบ

20 เมษายน 2565

# แบบจำลองนิวเคลียส

- ▶ ธรรมชาติของแรงนิวเคลียร์
  - ▶ เป็นแรงระยะสั้นระหว่างอนุภาคนิวเคลียร์ (โปรตอน และนิวตรอน)
  - ▶ ไม่ขึ้นกับประจุไฟฟ้า
  - ▶ มีความแรงมากกว่าแรงผลักรวมระหว่างโปรตอน
- ▶ ความคาดหวังเกี่ยวกับบ่อพลังงานศักย์แรงนิวเคลียร์



▶ แบบจำลองก๊าซ(อุดมคติ)ของเฟอร์มี

▶ ก๊าซอุดมคติ = อนุภาคอิสระ = คลื่นนิ่งในปริมาตร  $V = L^3$

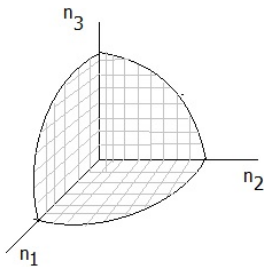
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mapsto k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \frac{\pi^2}{L^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) = \frac{\pi^2 n^2}{L^2} \quad (1)$$

เมื่อ  $k_i = n_i \pi / L, n_i = 1, 2, 3, \dots; i = 1, 2, 3$

$$p = \hbar k \mapsto n^2 = \frac{L^2 p^2}{\pi^2 \hbar^2} \quad (2)$$

$$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \mapsto dN = (2) \frac{1}{8} dV_n = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} dV_p \quad (3)$$

สำหรับ  $n_1, n_2, n_3 > 0$



▶ แบบจำลองก๊าซ(อุดมคติ)ของเฟอร์มี (ต่อ)

$$N = \int dN = 2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} p_F^3 \quad (4)$$

$$\mapsto p_F = \hbar \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \quad (5)$$

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3} \quad (6)$$

เพราะ

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A, \quad r_0 = 1.2 \text{ fm}$$

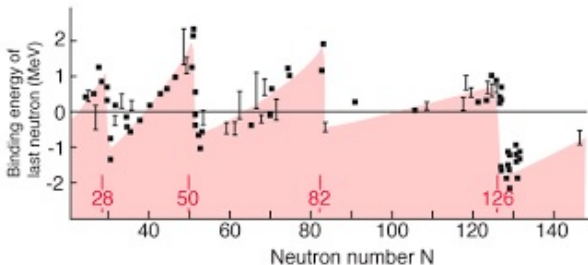
$$N \equiv Z = \frac{A}{2} \mapsto p_F = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad (7)$$

$$\mapsto E_F \simeq 33 \text{ MeV} \quad (8)$$

$$E_B \simeq 8 \text{ MeV} \mapsto V_C \sim 40 \text{ MeV} \quad (9)$$

- ▶ แบบจำลองชั้นพลังงาน (shell model) เนื่องมาจากการปรากฏของตัวเลขอัจฉริยะ (magic number) ของจำนวนโปรตอน หรือ นิวตรอน ที่มีผลทำให้นิวเคลียสมีค่าพลังงานยึดเหนี่ยวสูง ลักษณะเดียวกับชั้นพลังงานของอิเล็กตรอน ในอะตอม

2 8 20 28 50 82 126



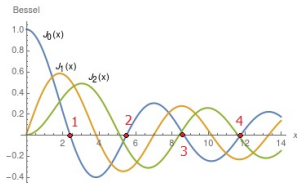
- ▶ โครงสร้างชั้นพลังงานแบบควอนตัม มาจากแบบจำลองบ่อพลังงานศักย์กักขัง (confining potential well)
- ▶ การคาดเดาแบบจำลองบ่อพลังงานศักย์กักขังง่ายที่สุด คือ บ่อพลังงานศักย์ทรงกลมอนันต์ (infinite potential sphere) รัศมี  $a$

$$V(r) = \begin{cases} 0, & 0 < r < a \\ \infty, & r \geq a \end{cases}$$

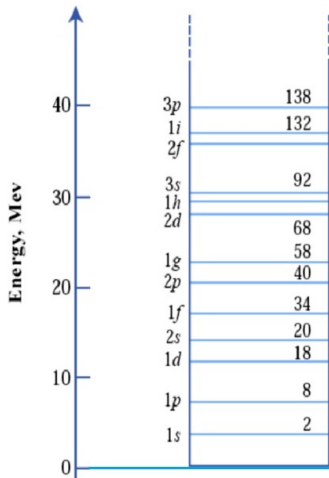
- ▶ จากผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ในแนวรัศมี ภายในทรงกลมพลังงานศักย์อนันต์ พบว่า

$$R_{lE}(r) = C j_l(kr), \quad k = \sqrt{2mE/\hbar^2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

$$j_l(ka) = 0 \text{ at } ka = Z_{nl}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$



$z_{nl}$	$j_0(x)$	$j_1(x)$	$j_2(x)$	$j_3(x)$	$j_4(x)$
$n$ 1	3.14159	4.49341	5.76346	6.98793	8.18256
2	6.28319	7.72525	9.09501	10.4171	11.7049
3	9.42478	10.9041	12.3229	13.6980	15.0397
4	12.5664	14.0662	15.5146	16.9236	18.3013
5	15.7080	17.2208	18.6890	20.1218	21.5254



► Spin-orbit coupling term

$$V_{LS} = -\alpha(\vec{L} \cdot \vec{S}) \quad (12)$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \mapsto J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

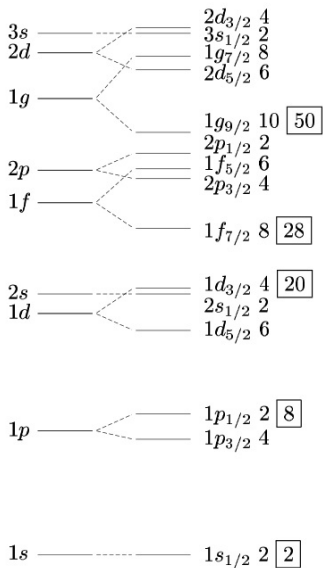
$$\begin{aligned} \mapsto V_{LS} &= -\frac{\alpha}{2} (J^2 - L^2 - S^2) \\ &= -\frac{\alpha\hbar^2}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \quad (13) \end{aligned}$$

เนื่องจากว่า  $s = 1/2 \mapsto j = l + 1/2, l - 1/2$  ดังนั้น

$$V_{LS} = \frac{\alpha\hbar^2}{2} \begin{cases} j + 3/2, & j = l - 1/2 \\ -(j - 1/2), & j = l + 1/2 \end{cases}$$

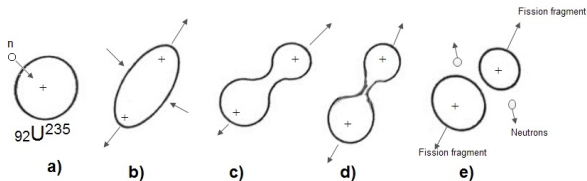
$$\text{Occupation number} = 2j + 1$$



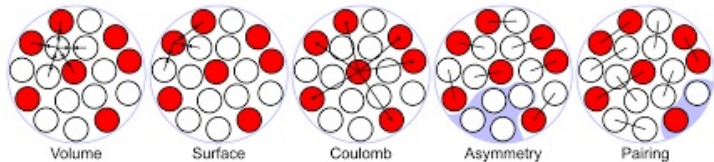


กรณีตัวอย่าง  ${}^{40}_{20}\text{Ca} \mapsto p, n : 1S^2_{1/2} 1P^4_{3/2} 1P^2_{1/2} 1D^6_{5/2} 2S^2_{1/2} 1D^4_{3/2}$

- ▶ แบบจำลองหยดของเหลว (liquid drop) ถูกนำเสนอเพื่อบรรยายอันตรกิริยานิวเคลียร์แบบแยกส่วน (fission)



- ▶ พลังงานยึดเหนี่ยว เมื่อพิจารณาจากแบบจำลองหยดของเหลว



▶ สมการของ เบ็ธ-วีซแซกเคอร์ (Bethe-Weizacker formula)

$$E_b = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A^{1/3}} + \delta(A, Z) \quad (14)$$

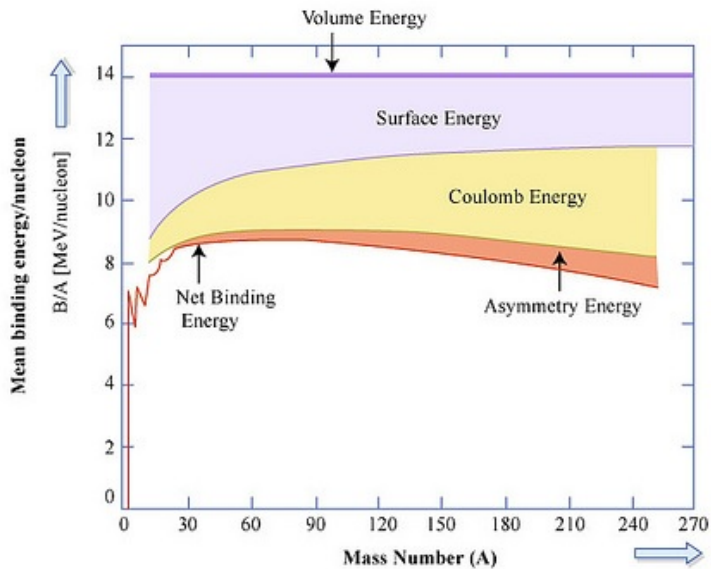
$$a_V = 15.85 \text{ MeV}, a_S = 18.34 \text{ MeV},$$

$$a_C = 0.714 \text{ MeV}, a_A = 23.21 \text{ MeV},$$

$$a_P = 12.00 \text{ MeV}$$

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} +\delta_0, & A, Z - \text{even} \\ 0, & A - \text{odd} \\ -\delta_0, & A, Z - \text{odd} \end{cases}, \quad \delta_0 = \frac{a_P}{A^{1/2}}$$

หมายเหตุ ค่า  $a$ 's ได้มาจากการทดลอง

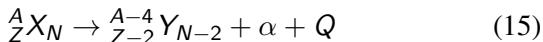


# กระบวนการสลายตัว

- ▶ ช่องทางการสลายตัวของนิวเคลียสที่มีเสถียรภาพน้อย มีดังนี้
  - ▶ การสลายตัวให้อนุภาค อัลฟา ( $\alpha = {}^4_2\text{He}^{+2}$ )
  - ▶ การสลายตัวให้อนุภาค เบต้า ( $\beta^\mp = e^\mp$ ) และการจับอิเล็กตรอน (electron capture: EC) ของอะตอม
  - ▶ การปลดปล่อยอนุภาค แกมมา ( $\gamma = \text{photon}(\text{MeV})$ )

## กระบวนการสลายตัว

- ▶ ช่องทางการสลายตัวของนิวเคลียสที่มีเสถียรภาพน้อย มีดังนี้
  - ▶ การสลายตัวให้อนุภาค อัลฟา ( $\alpha = {}^4_2\text{He}^{+2}$ )
  - ▶ การสลายตัวให้อนุภาค เบต้า ( $\beta^\mp = e^\mp$ ) และการจับอิเล็กตรอน (electron capture: EC) ของอะตอม
  - ▶ การปลดปล่อยอนุภาค แกมมา ( $\gamma = \text{photon}(\text{MeV})$ )
- ▶ การสลายตัวให้อนุภาคอัลฟา สมการการสลายตัว



$$Q = (M(X) - M(Y) - M(\alpha))c^2 \quad (16)$$

พิจารณา  $K_\alpha$  จาก  $Q$  ใน rest-frame ของ X  
และจากหลักการอนุรักษ์โมเมนตัม และพลังงาน

$$\begin{aligned} p_\alpha &= p_Y, \quad M_X c^2 = M_Y c^2 + K_Y + M_\alpha c^2 + K_\alpha \\ \mapsto K_\alpha + K_Y &= (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 = Q \end{aligned} \quad (17)$$

► การสลายตัวให้อนุภาคอัลฟา (ต่อ)

$$K_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha}, \quad K_Y = \frac{p_Y^2}{2M_Y} = \frac{p_\alpha^2}{2M_Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} K_\alpha$$
$$\mapsto K_\alpha \left( 1 + \frac{M_\alpha}{M_Y} \right) = Q \rightarrow K_\alpha = \frac{M_Y}{M_Y + M_\alpha} Q \simeq \frac{A-4}{A} Q \quad (18)$$

กรณีตัวอย่าง  ${}^{208}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{204}_{82}\text{Pb} + \alpha$

$$M({}^{208}\text{Po}) = 207.981246u, \quad M({}^{204}\text{Pb}) = 203.973044u,$$

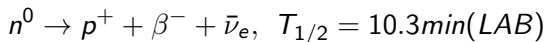
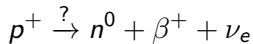
$$M(\alpha) = 4.001506$$

$$\mapsto Q = (0.006736uc^2)(931.5\text{MeV}/uc^2) = 6.275\text{MeV} \quad (19)$$

$$\mapsto K_\alpha = \frac{204}{208} 6.275\text{MeV} = 6.154\text{MeV} \quad (20)$$

แบบฝึกหัด ให้คำนวณ  $Q, K_\alpha$  จากการสลายตัว  ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + \alpha$

- ▶ การสลายตัวให้อนุภาคเบต้า  $\beta^\mp$  มีพื้นฐานจากการสลายตัวของโปรตอน และนิวตรอน ดังนี้

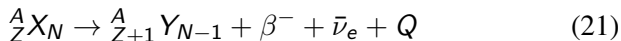


โดยที่  $\nu_e(\bar{\nu}_e)$  คืออนุภาค นิวตริโน ของอิเล็กตรอน  $m_{\nu_e} \sim 0$   
(ถูกคาดเดาการมีอยู่โดย Wolfgang Pauli (1930) และค้นพบโดย Clyde L. Cowan และ Frederick Reine (1956))



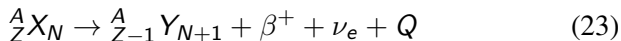


▶ การสลายตัวให้  $\beta^-$

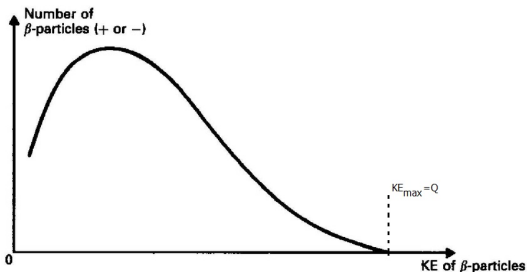


$$Q = [M(X) - M(Y)]c^2 \quad (22)$$

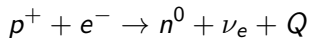
▶ การสลายตัวให้  $\beta^+$



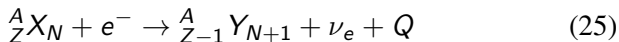
$$Q = [M(X) - M(Y) - 2m_e]c^2 \quad (24)$$



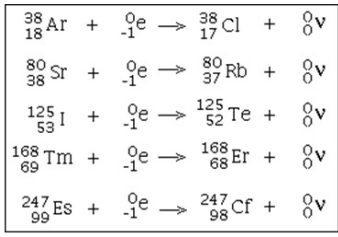
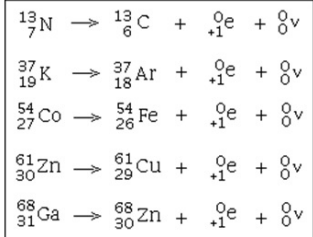
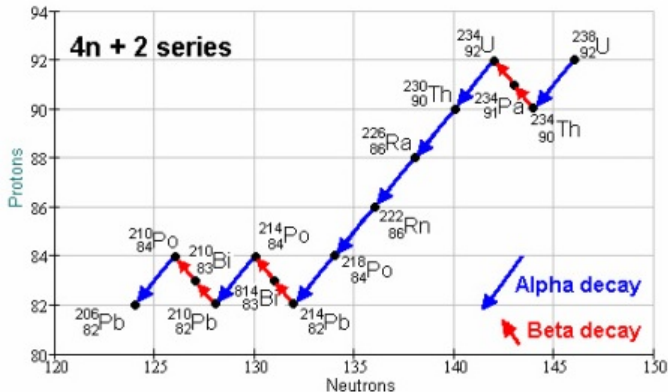
- ▶ การจับอิเล็กตรอน EC จากพื้นฐานของอันตรกิริยา



สมการ EC



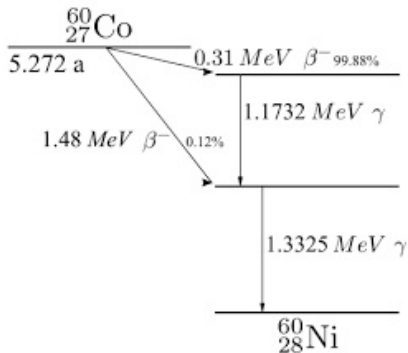
$$Q = [M(X) - M(Y) - 2m_e]c^2 \quad (26)$$



- ▶ การปลดปล่อยแกมมา = เป็นการลดระดับชั้นพลังงานจากสถานะกระตุ้นสู่สถานะพื้น

$${}^A_Z X_N^* \rightarrow {}^A_Z X_N + \gamma + Q, \quad (27)$$

$$E_\gamma = Q - K_X(\text{recoil}) \sim Q \quad (28)$$



Exercise: Obtain the maximum kinetic energy of  $\beta$ -particles, and the radiation frequencies of  $\gamma$  decays in the decay scheme shown in Figure. You are given that

$$m(^{198}\text{Au}) = 197.968233 \text{ u}$$

$$m(^{198}\text{Hg}) = 197.966760 \text{ u}.$$

